

2 Vertrauensintervalle (Konfidenzintervalle)

Die bisherigen Punktschätzer sind zwar genau aber unsicher.

Die im Folgenden besprochenen Konfidenzintervalle (Vertrauensintervalle) machen dem gegenüber unscharfe Aussagen aber mit einer gewissen Verlässlichkeit.

Viele Vertrauensintervalle haben die Form:

Schätzung des Parameters

$\mp$ *Vielfaches der geschätzten Standardabweichung des Parameters*

Definition:

Gilt für eine Zufallsvariable X für jeden Bereich B

$$P(X \in B) \geq 1 - \alpha$$

dann heisst B Konfidenzintervall (Vertrauensintervall, Prognosebereich) für X zum Niveau α .

Das Vielfache hängt dabei von der Verteilung und der Vertrauenswahrscheinlichkeit ab.

Beispiel:

Ist etwa die Zufallsvariable X etwa $N(5; 2^2)$ normalverteilt (kurz: $X \sim N(5; 2^2)$) dann ist $|X - 5| \leq 1.96 \cdot 2$ oder $1.08 \leq X \leq 8.92$ ein (0.95)-Prognoseintervall.

Dies bedeutet, dass ein Ergebnis (eine Realisation) von X mit einer Wahrscheinlichkeit 95% in diesem Intervall liegen wird. Die Prognose ist dann für die Beobachtung $X = 4$ richtig, für $X = 10$ falsch.

Beispiele für Vertrauensintervalle:

Gesucht ist ein Vertrauensintervall für den

Erwartungswert μ einer normalverteilten Zufallsvariablen

Fall 1: Die Varianz σ^2 ist bekannt (selten!)

Der zweite Fall führt auf die im nächsten Abschnitt behandelte Student-t-Verteilung.

Die standardisierte Variable

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0; 1^2)$$

ist dann Standard-normalverteilt.

Gemäss den Eigenschaften von Zufallsvariablen ist nämlich die Varianz des Mittelwerts von n unabhängigen Messungen nicht σ^2 (wie bei Einzelmessungen) sondern nur noch $\frac{\sigma^2}{n}$.

Die Breite des Prognoseintervalles kann also mit einer Erhöhung der Anzahl Messungen verkleinert werden. Bei einer Verkleinerung des Stichprobenumfangs vergrössert sich der Standardfehler und damit die Länge des Vertrauensintervalls.

Das 95%-Vertrauensintervall für den unbekannten Mittelwert μ von Stichproben vom Umfang n zu

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Das Vertrauensintervall hat also die Länge

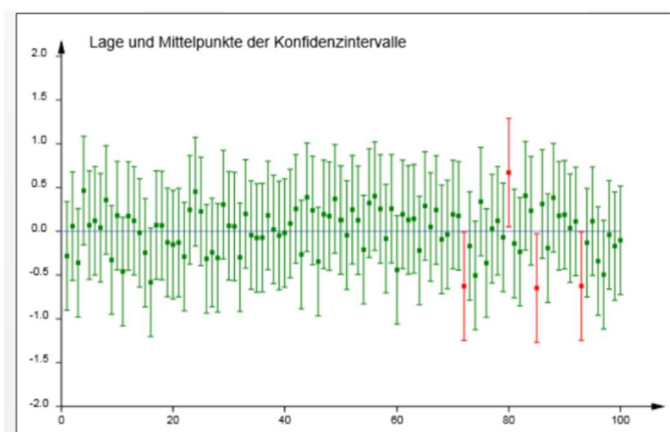
$$L = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

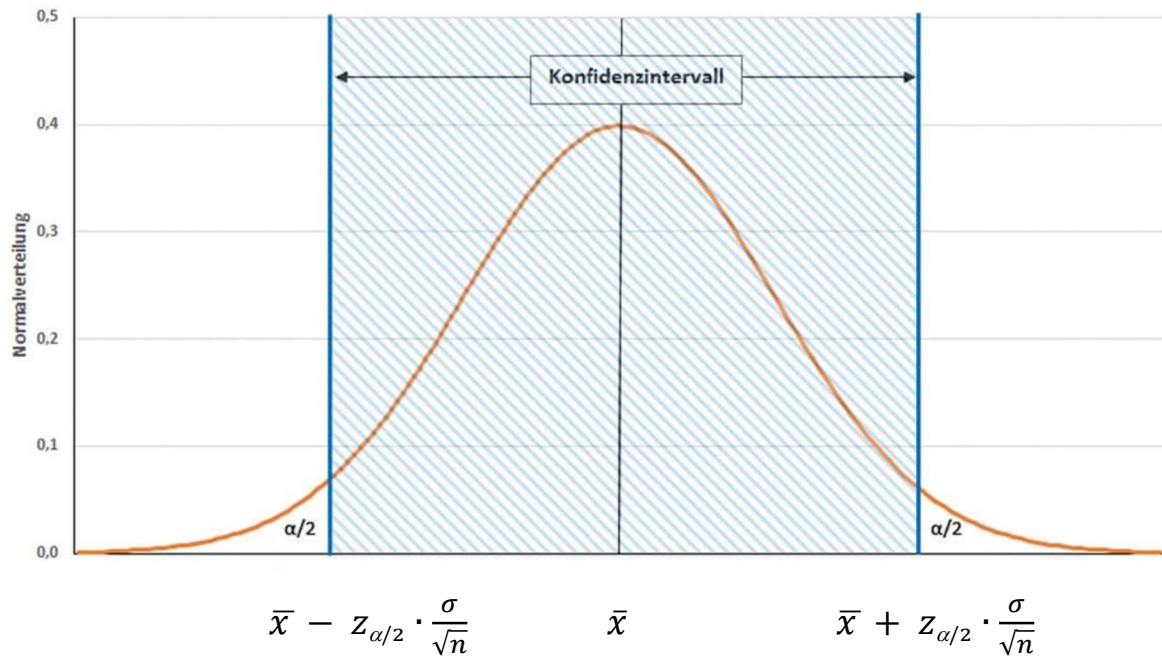
Zur Illustration:

Mit standardnormalverteilten Zufallsvariablen wurden Stichproben vom Umfang $n = 10$ erzeugt und für jede der Mittelwert bestimmt. Dieser Vorgang wurde $k = 100$ mal ausgeführt. So entstanden die 100 abgebildeten Vertrauensintervalle der Länge

$$L = 2 \cdot \frac{1.96}{\sqrt{10}} \approx 1.24$$

Im Beispiel enthalten die vier rot dargestellten Vertrauensintervalle den (ausnahmsweise) bekannten Mittelwert $\mu = 0$ nicht.





Beispiel:

Da eine Käserei ein eigenes Joghurt herstellen will, beschliesst sie, eine neue Abfüllmaschine zu kaufen. Zahlreiche Versuche zeigen, dass die Gewichte der Joghurts normalverteilt sind mit dem Mittelwert $\mu = 500.00$ g und der Standardabweichung $\sigma = 2.00$ g. Gesucht ist ein 95%-Vertrauensintervall für den Mittelwert der Joghurtgewichte.

Zur Kontrolle kauft die Käserei 3 zufällig ausgewählte Joghurt und berechnet den Mittelwert der Gewichte. Liegt das mittlere Gewicht 498.0 noch im Vertrauensintervall?

$$\left[\bar{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Vertrauensintervall

95%
Faktor 1.96

μ	σ	n
500.00	2.00	3
Vertrauensintervall		497.74 502.26

498.0 liegt zwar im Intervall. Angesichts der kleinen Stichprobe ist das Resultat aber wenig aussagekräftig.

Vertrauensintervall für die Binomialverteilung

Ist eine Zufallsvariable X binomialverteilt $B(n, p)$, dann gilt bekanntlich für die Schätzer des Erwartungswerts und der Varianz:

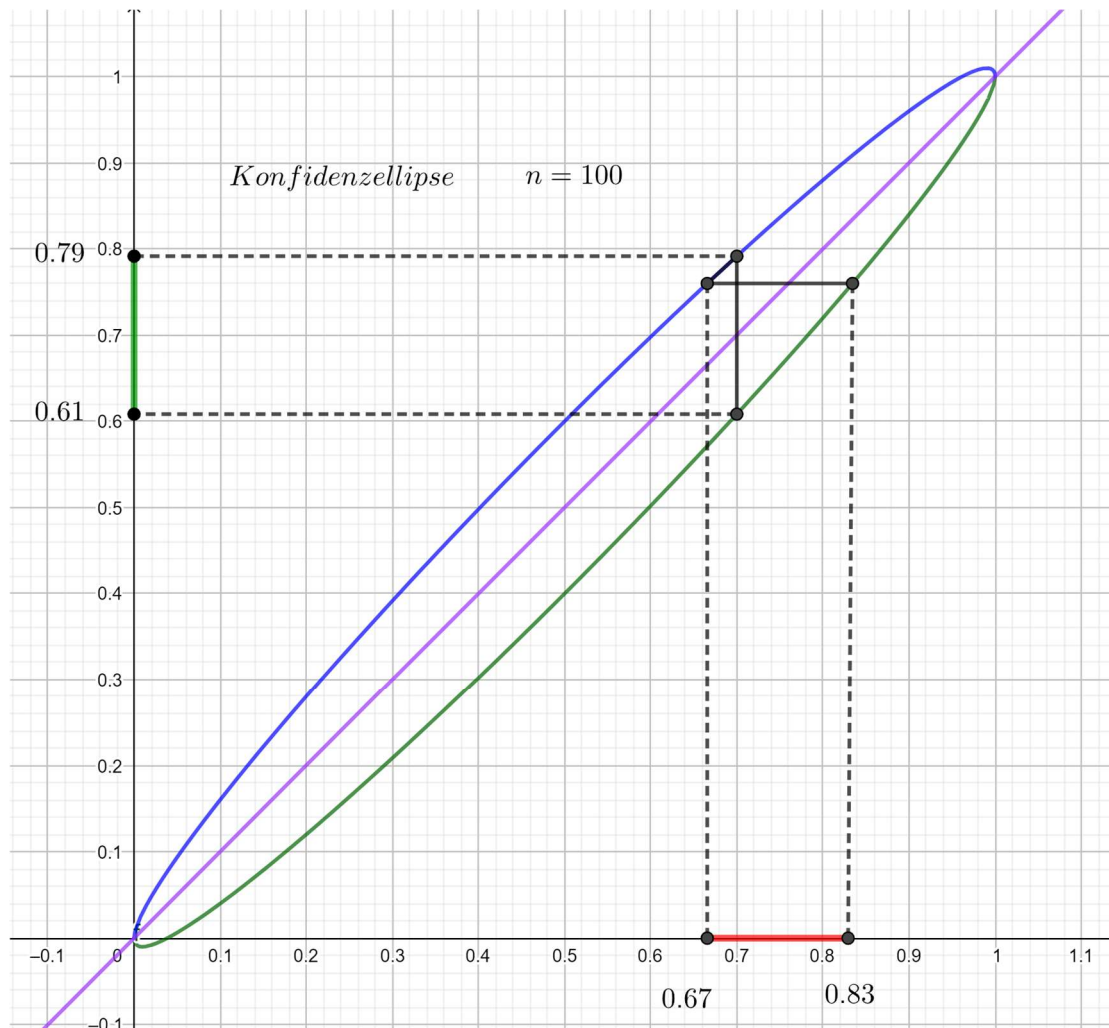
Erwartungswert $E(X) = \hat{p} = \frac{x}{n}$ und

Varianz $V(X) = \frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}$

Für grössere n (Faustregel $n > 30$ oder $\frac{9}{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}$) ist X angenähert normalverteilt und für das Vertrauensintervall ergibt sich damit

$$\left[\hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \right]$$

In der Abbildung sind die Grenzen des Vertrauensintervalls in Funktion der relativen Häufigkeiten für das Signifikanzniveau $\alpha = 95\%$ dargestellt.



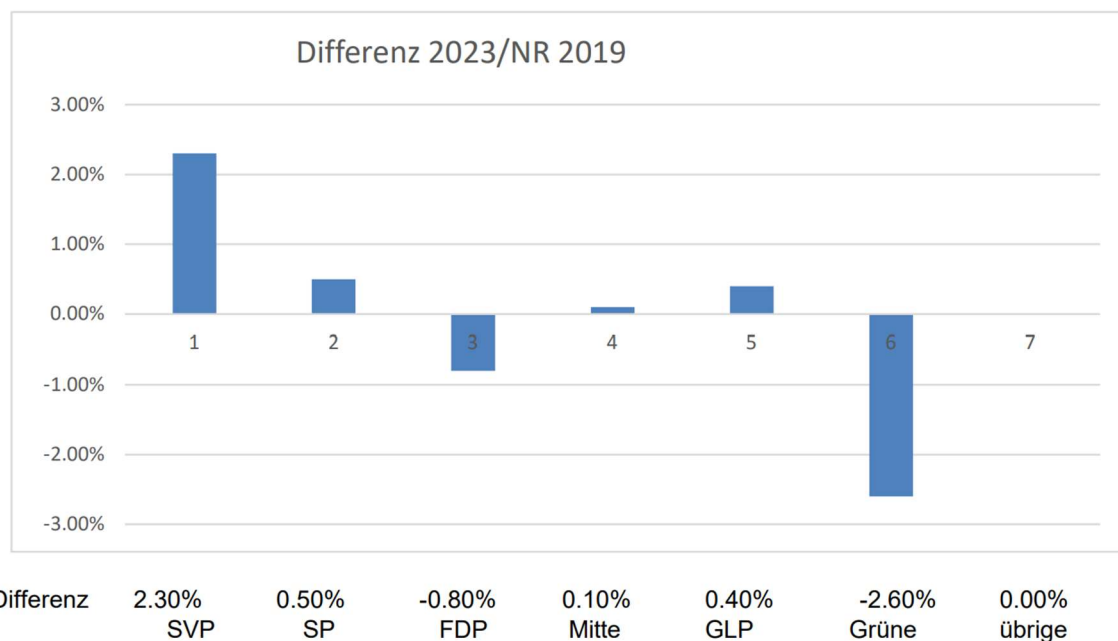
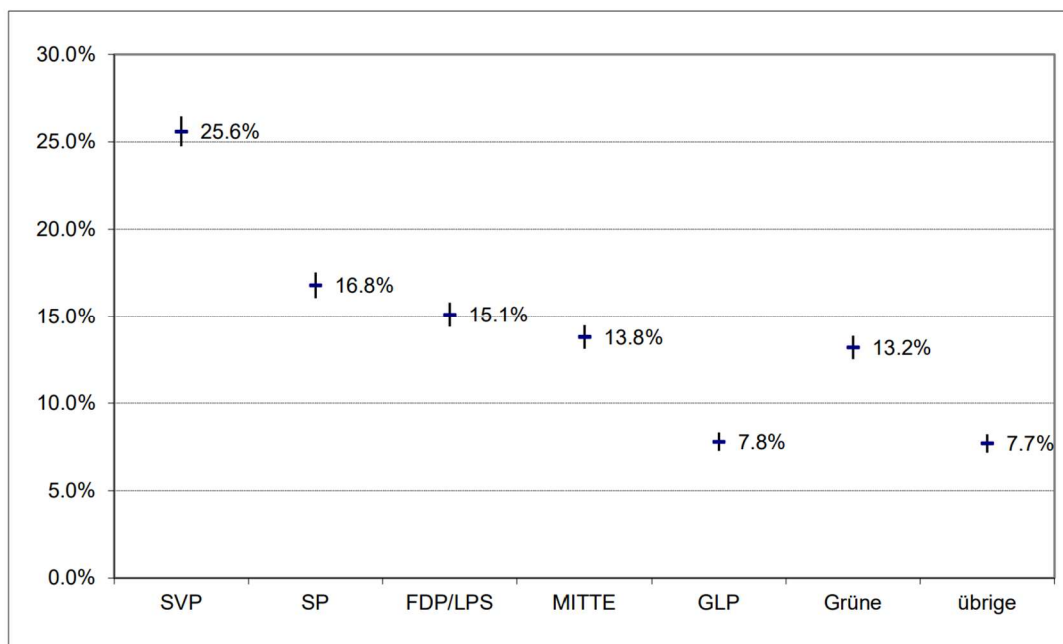
Das **Prognoseintervall** auf der x-Achse (rot dargestellt) enthält relative Häufigkeiten. Ist eine Wahrscheinlichkeit z.B. $p=0.7$ gegeben, dann enthält das zu 0.7 symmetrische Intervall $[0.67, 0.83]$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% alle relativen Häufigkeiten, die im Vertrauensintervall von $p=0.7$ liegen. Ist p gegeben, dann werden in 95% aller Fälle Versuchsserien vom Umfang $n=200$ innerhalb dieses Intervalls liegen.

Das **Konfidenzintervall** auf der y-Achse (grün dargestellt) enthält Wahrscheinlichkeiten. Das vom Zufall abhängige Konfidenzintervall zu einer beobachteten relativen Häufigkeit überdeckt die unbekannte Wahrscheinlichkeit p mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%. Die beiden Intervalle halbieren sich, wenn der Umfang der Stichprobe vervierfacht wird.

Umfragen vor Wahlen

Auf der folgenden Seite sind die Ergebnisse der letzten Nationalratswahlen 2019 zusammengestellt. Am 10./11. Juli 2023 wurde eine Umfrage über die nächsten Nationalratswahlen im Oktober 2023 durchgeführt. Die relativen Häufigkeiten ergeben Vertrauensintervalle für die Anteile der verschiedenen Parteien. Zusätzlich sind noch die Veränderungen bezüglich der Wahlen 2019 angegeben.

Vertrauensintervalle		Wähleranteile		Umfrage Nationalratswahlen 2023.07.11			NR 19
n	25688	x/n	1-x/n	d	95%-Vertrauensintervall		
SVP		0.279	0.721	0.0055	27.4%	28.4%	25.6%
SP		0.173	0.827	0.0046	16.8%	17.8%	16.8%
FDP		0.143	0.857	0.0043	13.9%	14.7%	15.1%
MITTE		0.139	0.861	0.0042	13.5%	14.3%	13.8%
Grüne		0.107	0.893	0.0038	10.3%	11.1%	13.2%
GLP		0.082	0.918	0.0034	7.9%	8.5%	7.8%
Andere		0.077	0.923	0.0033	7.4%	8.0%	7.7%



Liegt bei der nächsten Umfrage das Ergebnis einer Partei ausserhalb des 95%-Intervalls, dann sind zwei Interpretationen möglich:

- die Umfrage zeigt bei dieser Partei ein ungewöhnliches (signifikantes) Ergebnis.
- der Anteil der Partei hat sich verändert.

Ergänzung:

Um die unbekannte Wahrscheinlichkeit einer Konfidenzintervalls mit einer bestimmten Genauigkeit d zu schätzen ist ein Stichprobenumfang n nötig.

Für die Länge des Intervalls ε gilt:

$$d = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}}$$

quadriert

$$d^2 = z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}$$

und damit

$$n \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \cdot \frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{d^2}$$

Wegen $\hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) \leq \frac{1}{4}$ gilt die ungenauere Abschätzung

$$n \geq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{4d^2}$$

Beispiele:

zulässiger Fehler d	0.05	0.02	0.01
notwendiger Stichprobenumfang	400	2500	10000

Übungsaufgabe

Die SVP hat bei den letzten Nationalratswahlen 2019 einen Anteil von 25.6 % der Stimmenden erhalten. Wie gross ist der Stichprobenumfang zu wählen, damit der Wähleranteil mit 95% Sicherheit auf 1.5% genau geschätzt werden kann?