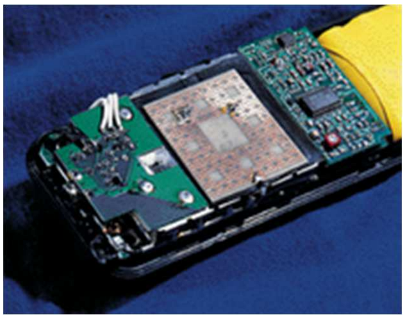
9. Fraktale

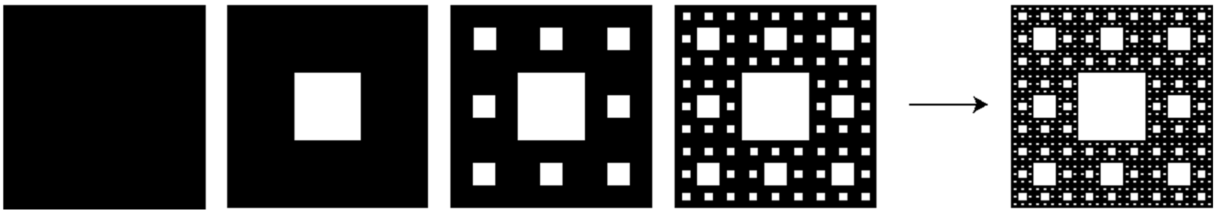
Bei der Betrachtung der Küstenlinie einer Insel, stösst man auf das folgende Problem:
Je genauer man die Küste zeichnet, desto länger wird sie. Entsprechende Probleme ergeben sich bei der Darstellung der Oberfläche einer Wolke, eines Schwamms oder der Lunge. Fraktale sind eine mathematische Idealisierung dieses Phänomens.

Kennzeichnend für Fraktale sind der rekursive Aufbau und die beiden folgenden Eigenschaften:
1. Selbstähnlichkeit: In jedem Teil finden wir die Form des Ganzen wieder.
2. Es treten keine glatten Begrenzungen auf.

In den beiden Abbildungen eines Farns bzw. eines Romanesco ist die fraktale Struktur zu erkennen.

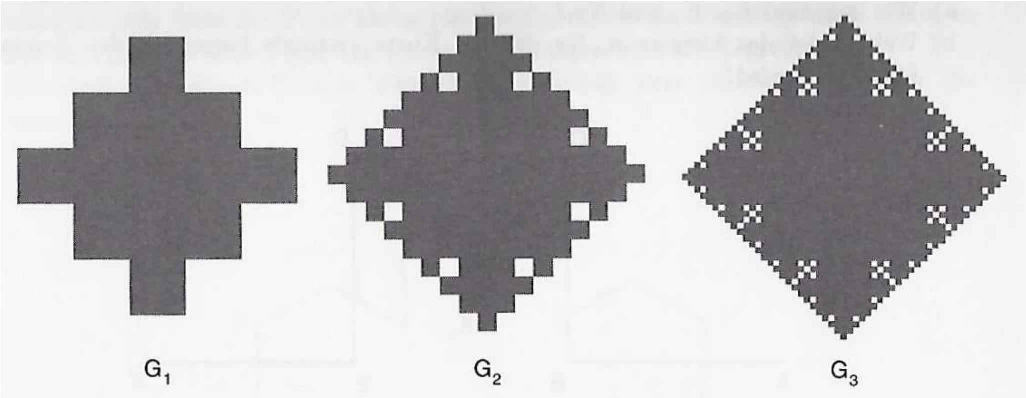
Als Anwendungen seien erwähnt:
Für Computerspiele können mit Fraktalen realitätsnahe Landschaften erstellt werden. Fraktalantennen ermöglichen es, verschiedene Frequenzbereiche zu empfangen. Die abgebildete Handyantenne hat Ähnlichkeit mit dem unten abgebildeten Sierpinski-Teppich,





Beispiele von Fraktalen:

9.1 Das **Kochquadrat**:



Jeder Seite eines Quadrats mit der Seitenlänge 1 wird ein Quadrat so angesetzt, dass die neue Figur lauter gleich lange Seiten hat. Dieser Ansetzungsprozess wird fortgesetzt.

Aufgabe:
Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt der n-ten Figur und gegebenenfalls den Grenzwert für n gegen unendlich.

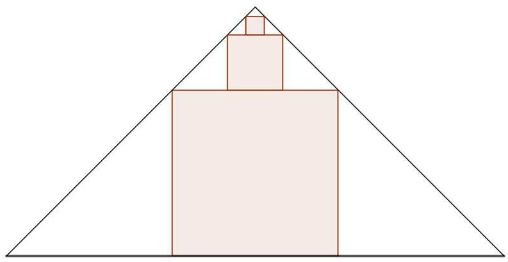
Bei jedem Schritt wird die Anzahl der Quadrate ver-5-facht, die Quadratseite mit $\frac{1}{3}$ und der Quadratinhalt mit $\frac{1}{9}$ multipliziert.

Für den Umfang U_n der n-ten Figur gilt:
$U_n = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$
Der Umfang wird schliesslich grösser als jede noch so grosse Zahl d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \infty$

Für den Flächeninhalt der n–ten Figur gilt:
$A_0 = 1$ $\qquad A_n = A_0 + \left(\frac{4}{9}A_0 + \frac{4}{9}A_0 \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{9}A_0 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{4}{9}A_0 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}\right)$
In der Klammer steht eine geometrische Reihe mit q = $\frac{5}{9}$.
Als Inhalt der Grenzfigur ergibt sich wie vermutet

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = A_0 + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = 2A_0 = 2 .$$

Bemerkung:
Die Mittenquadrate bilden einen Turm mit der Höhe
$h = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{2}$



Die vier "Turmspitzen" bilden also ein Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{2}$, das dem Startquadrat mit der Kantenlänge 1 umbeschrieben ist. Als Flächeninhalt des Grenzquadrats ergibt sich erneut 2.

9.2 Schneeflockenkurve (nach Helge von Koch 1870-1924)

Auch bei diesem Beispiel schliesst eine ebene Kurve mit unendlicher Länge eine Fläche von endlichem Inhalt ein.

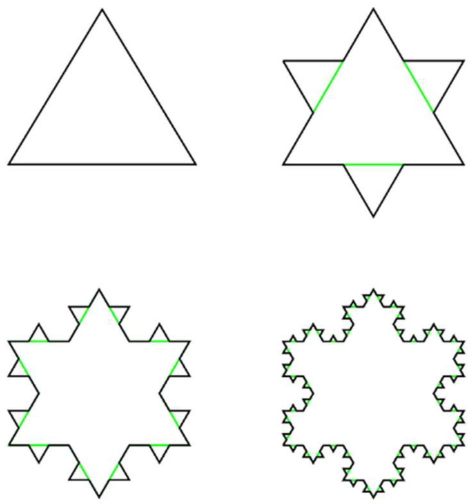
Die Kurve C_n entsteht aus einem gleichseitigen Dreieck. Jede Seite des Dreiecks wird in drei gleichlange Strecken geteilt, über der mittleren Strecke wird jeweils ein gleichseitiges Dreieck errichtet und diese mittlere Strecke dann weggelassen. Mit der neuen Figur verfährt man ebenso. Man denkt sich den Prozess unbegrenzt fortgesetzt.

Wir bezeichnen mit

a_n Anzahl der Seiten von C_n

U_n Umfang von C_n

A_n den Flächeninhalt innerhalb von C_n



Es gelten die folgenden
Rekursions- bzw. expliziten Formeln:

Aus jeder Strecke entstehen 4 neue Strecken

$a_1 = 3 \qquad a_{n+1} = 4a_n \qquad a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$

Jede der 4 neuen Kanten hat einen Drittel der Länge der vorhergehenden

$U_{n+1} = \frac{4}{3} U_n \qquad U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot U_1$

Die Grenzkurve ist folglich unendlich lang.

Zur Berechnung des Flächeninhalts untersuchen wir den Flächenzuwachs.
Beim Übergang von C_1 nach C_2 besteht dieser Flächenzuwachs aus den drei kleinen Dreiecken, die an das Ausgangsdreieck angefügt werden. Sie besitzen $\frac{1}{9}$ des Flächeninhalts des grossen Dreiecks. Damit gilt:

$A_2 = \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{9}\right) \cdot A_1 = A_1 + \frac{1}{3} \cdot A_1$ wobei das Ausgangsdreieck den Inhalt $A_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ hat.

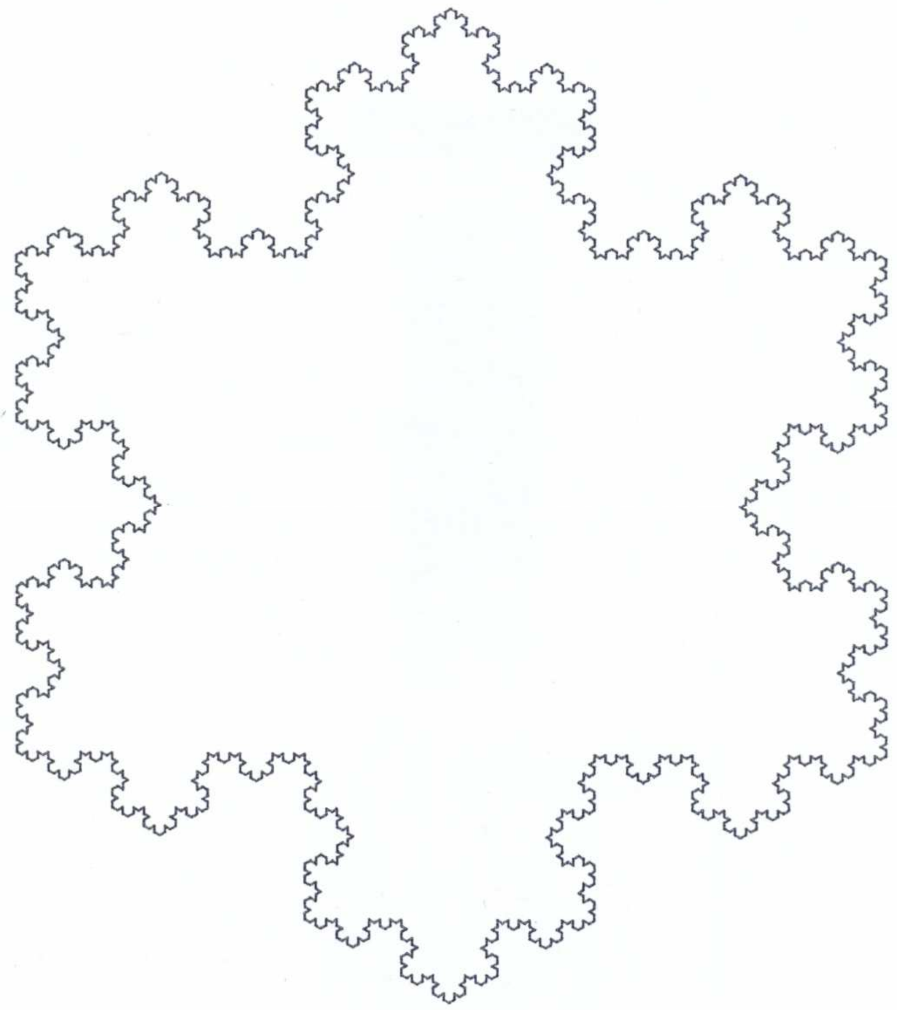
Beim Übergang von C_n nach C_{n+1} für $n \geq 2$ vervierfacht sich die Anzahl der Dreieck, ihr Inhalt wird mit $\frac{1}{9}$ multipliziert. Der Flächenzuwachs bildet also eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $A_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ und dem Quotienten q = $\frac{4}{9}$.
Für den Flächen Inhalt nach n Schritten gilt:

$$A_n = A_1 + A_1\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 + ... + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{4}{9}\right)^{n-2}\right)$$

Für die Summe der nichtabbrechenden geometrischen Reihe folgt daraus:

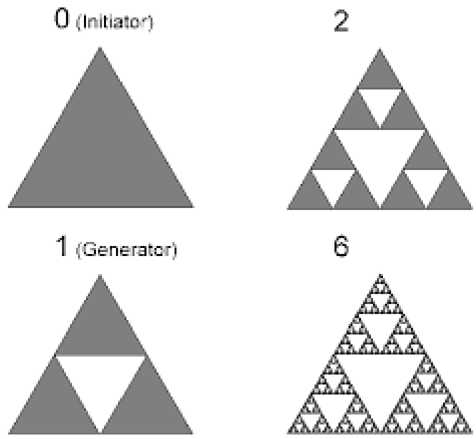
$$A = A_1 + \tfrac{1}{3} A_1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = A_1 + A_1 \cdot \tfrac{9}{15} = \tfrac{8}{5} \cdot A_1$$

Die Schneeflockenkurve mit unendlichem Umfang umschliesst also einen endlichen Flächeninhalt, nämlich das $\frac{8}{5}$-fache von der Grösse des Ausgangsdreiecks.



Quelle: ac

Übungsaufgabe:
Ein gleichschenkliges Dreieck wird durch die drei Mittelparallelen in vier kongruente Dreiecke unterteilt. In der Figur ist das Mittendreieck weiss dargestellt. Diese Figur wird mit F_1 bezeichnet. Dieses erste weiss gefärbte Mittendreieck habe den Inhalt 1. In den verbleibenden dunkel gefärbten Dreiecken wird im nächsten Schritt das Mittendreieck ebenfalls weiss dargestellt. Auf diese Weise entsteht die Figur F_2. Dieser Prozess wird beliebig wiederholt. Berechnen Sie den Inhalt der weiss gefärbten Figur F_nFn und allenfalls den Grenzwert für n gegen unendlich.



Lösung:

$F_1 = 1 \qquad F_2 = 1 + \frac{3}{4} \qquad F_3 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} \qquad F_n = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

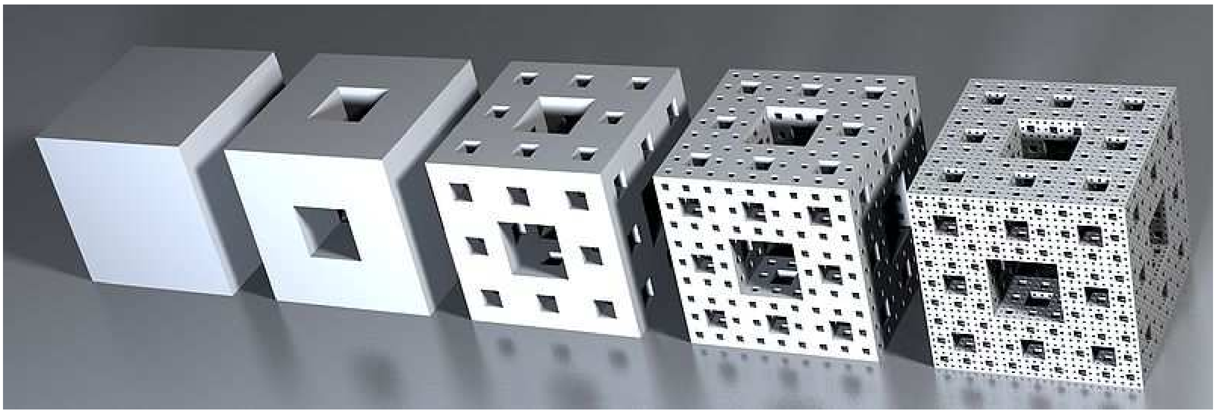
$\lim\limits_{n \to \infty} F_n = 4$

9.3 Der Menger-Schwamm

Man zerlegt einen Würfel mit der Kantenlänge 1 in 27 kongruente Würfel und entfernt anschliessend diejenigen der kleineren Würfel, welche in den Flächenmitten des grossen Würfels liegen, sowie den im Zentrum liegenden Würfel. Der entstandene Körper S_1 hat somit das Volumen von 20 der kleineren Würfel. Setzt man diesen Prozess beliebig fort, entsteht im Grenzfall der Mengerschwamm.Welches Volumen V_n hat der Körper S_n?

$$V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n$$

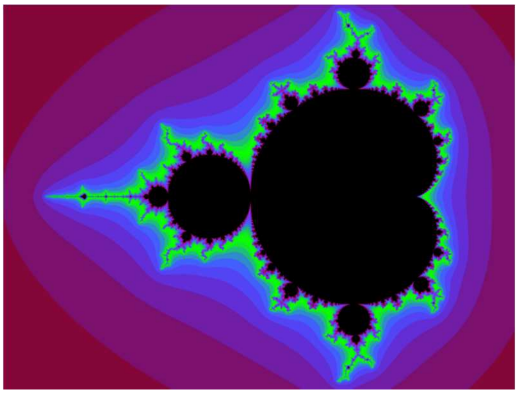
vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm



Bemerkung:
Die Figurenfolge auf einer Seitenfläche heisst Sierpinski-Teppich
Die Quadrate der Seitenflächen werden als die Löcher im Teppich interpretiert. Der Inhalt des n-ten Teppichs ist $A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$. Der Inhalt der Grenzfläche ist somit 0.

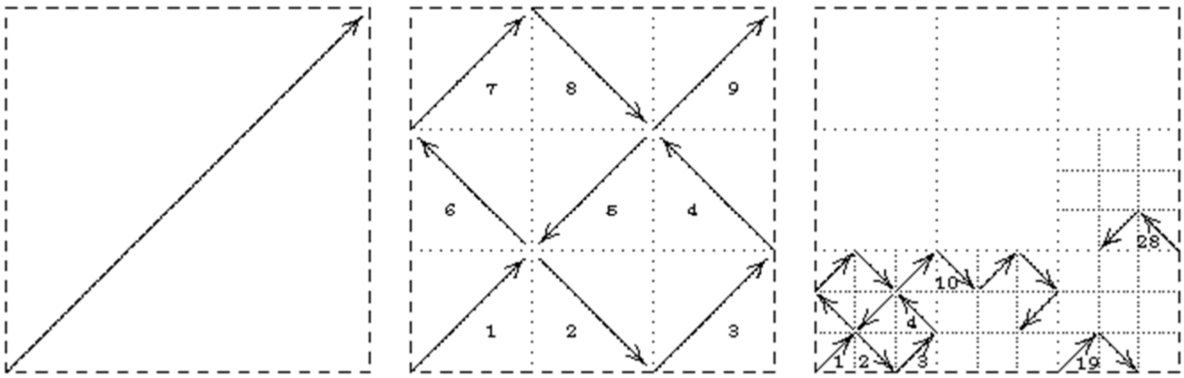
Ein besonders schönes Beispiel für ein Fraktal ist das sogenannte Apfelmännchen bzw. die Mandelbrotmenge M (→ Komplexe Zahlen), benannt nach dem 1924 geborenen Mathematikprofessor Benoit Mandelbrot.
M besteht aus unendlich vielen gleichartigen, selbstähnlichen Teilen. Ein solcher Teil besteht aus einer Herzkurve (Cardioide), an der unendlich viele Kreise angehängt sind. Zu M gehören ferner linienförmige „Antennen“ und „Fäden“, welche diese Teile verbinden. Während das Innere der Herzkurve und der Kreise völlig ausgefüllt ist, besteht der Rand aus unbegrenzt vielen, äusserst reichhaltigen Formen.

http://
de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge



Exkurs: Peanokurven

In einem Quadrat wird die Diagonale durch den Streckenzug ersetzt, der aus den gezeichneten 9 Teilstrecken besteht. Jede Teilstrecke ist ein Drittel so lang wie die ursprüngliche Strecke. Im nächsten Schritt wird jede Teilstrecke erneut durch den neunteiligen Streckenzug ersetzt, wobei die Teilstrecken einen Drittel der bisherigen Teilstrecke betragen, …. Wird der Prozess beliebig fortgesetzt, so kann gezeigt werden, dass schliesslich das ganze Quadrat überdeckt wird, Nach dem italienischen Mathematiker Guiseppe Peano (1858 – 1932) werden diese flächendeckenden Kurven Peano-Kurven genannt.



n=0 n=1 n=2