Exponential- und Logarithmusfunktion

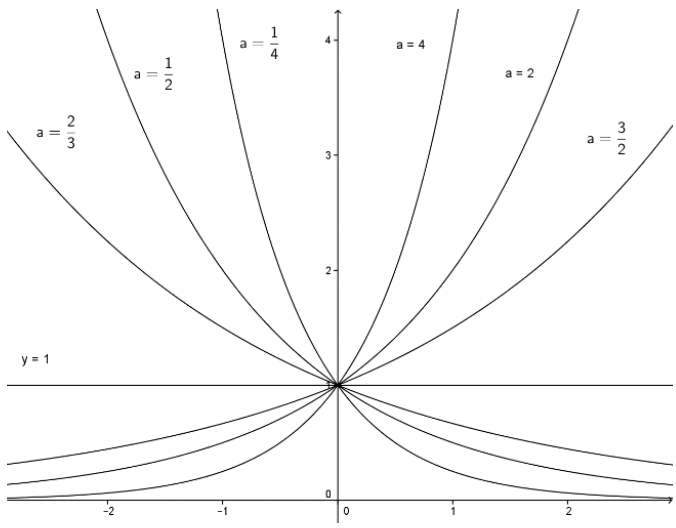
1. Die Exponentialfunktion

Definition:
Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a^x$ mit x ∈ **R**, a > 0 und a ≠ 1 heisst Exponentialfunktion.

Aufgabe:
Es sind die Graphen der Funktion $f(x) = a^x$ für a = 4, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ darzustellen und die folgenden allgemein gültigen Eigenschaften zu überprüfen:

Eigenschaften:

1. Die Exponentialkurven verlaufen ganz oberhalb der x-Achse.
   Begründung: $a^x > 0$ für alle x∈R
2. Der Punkt P(0, 1) ist allen Kurven gemeinsam.
   Begründung: $a^0 = 1$
3. Die zu den Basen a und $\frac{1}{a}$ gehörigen Kurven liegen symmetrisch zur y-Achse, denn $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
4. Die Exponentialkurven kommen der x-Achse schliesslich beliebig nahe d.h. die x-Achse ist Asymptote.
5. Die Kurven sind
   für a > 1 monoton wachsend
   für 0 < a < 1 monoton fallend.



Bemerkung:
Bei den Exponentialfunktionen ist a ein zulässiger gegebener Parameter, die Variable steht im Exponenten.
Bei den Potenzfunktionen mit der Gleichung $f(x) = x^a$ ist die Basis die Variable und der Exponent ein vorgegebener Parameter.

Beispiele:
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ und $f(x) = \pi^x$ sind Exponentialfunktionen
$f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sind Potenzfunktionen.

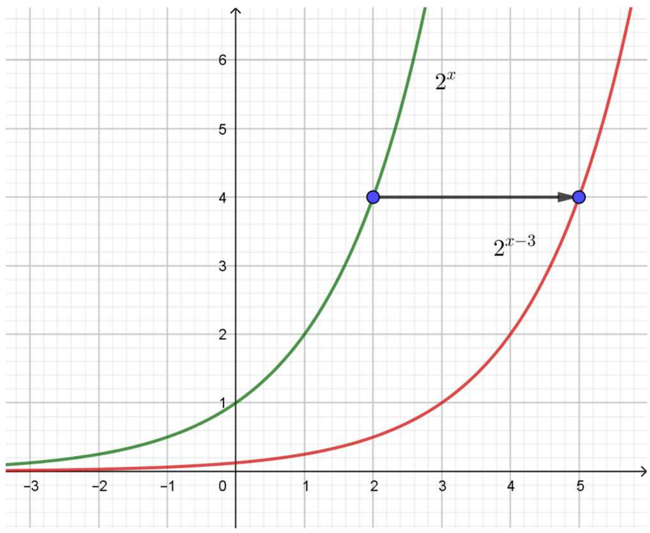
Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^x$ ist weder eine Exponential- noch eine Potenzfunktion.

Übungsaufgabe:
Für welchen Wert von a liegt der Punkt P auf der Kurve $y = f(x) = a^x$?
a) P($\frac{3}{2}$, 27) b) P(4, 9)
Lösung: a) a = 9 b) $a = \sqrt{3}$

Einfache Abbildungen

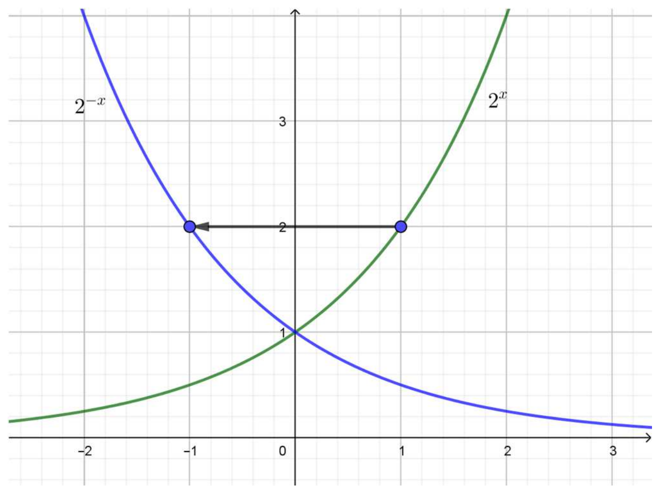
Aufgabe:
Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = 2^x$.
Es sind diese Exponentialkurve und die Bildkurve in den folgenden Fällen darzustellen. Wie heisst die passende Gleichung der Bildkurve?

a)
Translation in positiver x -Richtung um 3 Einheiten

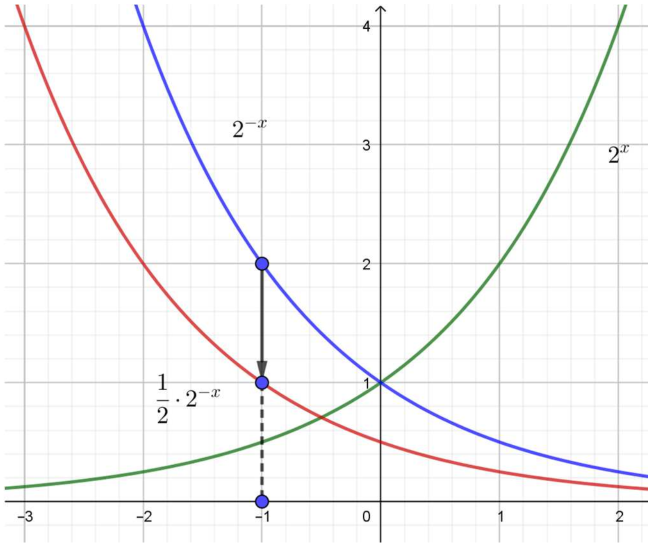


a)
$y = 2^x$
Abbildungsgleichungen:
$x' = x + 3$ und damit $x = x' - 3$
$y' = y$
Gleichung der Bildkurve $y = 2^{x-3}$

b)
Achsenspiegelung an der y-Achse
Gleichung der Bildkurve $y = 2^{-x}$

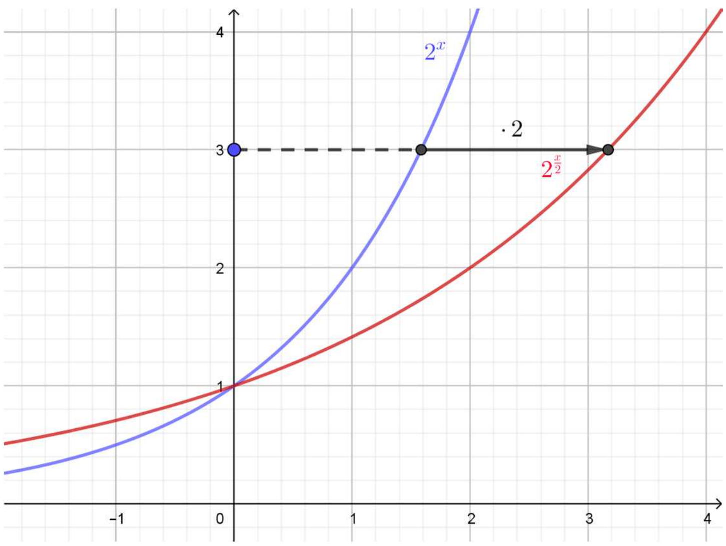


c)
Spiegelung an der y-Achse und axiale Streckung bezüglich der x-Achse mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$



Gleichung der Bildkurve
$y' = \frac{1}{2}\cdot\ 2^{-x} = 2^{-x-1}$
Verschiebung von $y = 2^{-x}$
in x-Richtung um -1

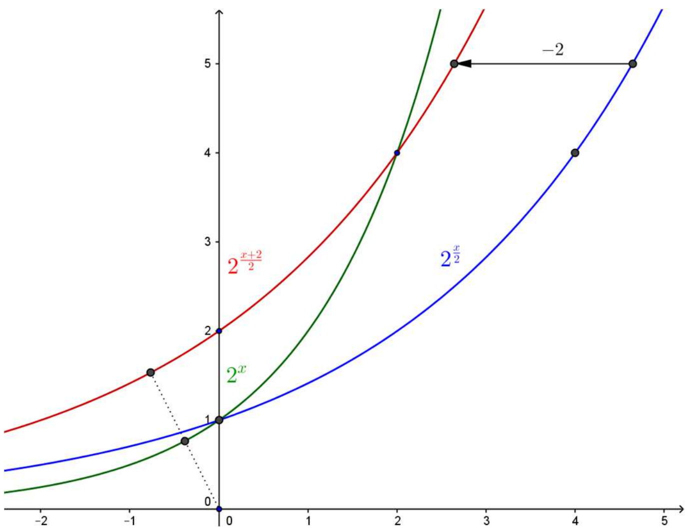
d)
axiale Streckung bezüglich der y-Achse mit dem Faktor 2



Abbildungsgleichungen :
$x' = 2 \cdot x$ und damit $x = \frac{1}{2}\cdot x'$
$y´ = y$ und damit $y = \frac{1}{2}\cdot y'$

Gleichung der Bildkurve
$y = 2^{\frac{x}{2}}$

e)
Zentrische Streckung bezüglich (0, 0) mit dem Streckungsfaktor 2



Abbildungsgleichungen :
$x' = 2 \cdot x$ und damit $x = \frac{1}{2}\cdot x'$
$y' = 2 \cdot y$ und damit $y = \frac{1}{2}\cdot y'$

$\frac{1}{2}\cdot y' = \ 2^{\frac{1}{2}\cdot x'}$ oder
$y' = \ 2\cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot x'} = 2^{\frac{1}{2}\cdot(x'+2)}$

Gleichung der Bildkurve :

$y = 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{1}{2}(x+2)}$

Verschiebung $2^{\frac{x}{2}}$ um -2 in x-Richtung

Vorgehen zur Bestimmung der Gleichung einer Bildkurve:

1.
Die Koordinaten (x, y) werden in den Bildkoordinaten (x´, y´) ausgedrückt.
2.
Ersetzen Sie mit 1. in der Gleichung der Originalkurve die Koordinaten
(x, y) durch (x´, y´)

Bemerkung:
Bei der Gleichung der Bildkurve wird der ´ weggelassen.