Exponential- und Logarithmusfunktion

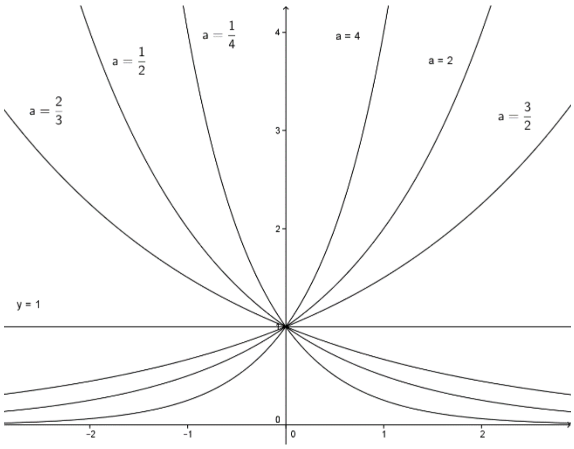
1. Die Exponentialfunktion

Definition:
Eine Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a^x$ mit $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$ und $a \neq 1$ heisst Exponentialfunktion.

Aufgabe:
Stellen Sie die Graphen der Funktion $f(x) = a^x$ für a = 4, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ dar.

Eigenschaften:

1. Die Exponentialkurven verlaufen ganz oberhalb der x-Achse.
2. Der Punkt P(0, 1) ist allen Kurven gemeinsam
3. Die zu den Basen a und $\frac{1}{a}$ gehörigen Kurven liegen symmetrisch zur y-Achse, denn $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$
4. Die Exponentialkurven kommen der x-Achse schliesslich beliebig nahe d.h. die x-Achse ist Asymptote.
5. Die Kurven sind
   für a > 1 monoton wachsend
   für 0 < a < 1 monoton fallend.



Bemerkung:
Bei den Exponentialfunktionen ist a ein zulässiger gegebener Parameter, die Variable steht im Exponenten.
Bei den Potenzfunktionen mit der Gleichung Funktion $f(x) = x^a$ ist die Basis die Variable und der Exponent ein vorgegebener Parameter.

Beispiele:
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ und $f(x) = \pi^x$ sind Exponentialfunktionen
$f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sind Potenzfunktionen.

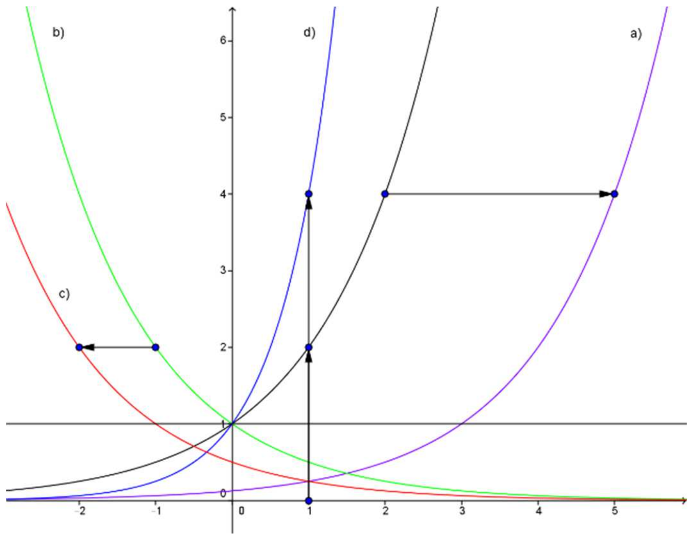
Die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^x$ ist weder eine Exponential- noch eine Potenzfunktion.

Übungsaufgabe:
Für welchen Wert von a liegt der Punkt P auf der Kurve $y = f(x) = a^x$?
a) P($\frac{3}{2}$, 27) b) P(4, 9)
Lösung: a) a = 9 b) $a = \sqrt{3}$

Einfache Abbildungen

Aufgabe:
Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = f(x) = 2^x$. Zeichnen Sie für folgende Abbildungen die Original- und die Bildkurve und geben Sie die Gleichung der Bildkurve an:

a) Translation in positiver x -Richtung um 3 Einheiten
b) Achsenspiegelung an der y-Achse
c) Spiegelung an der y-Achse und axiale Streckung bezüglich der x-Achse mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$
d) axiale Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$
e) Zentrische Streckung bezüglich (0, 0) mit dem Streckungsfaktor $\frac{1}{2}$.



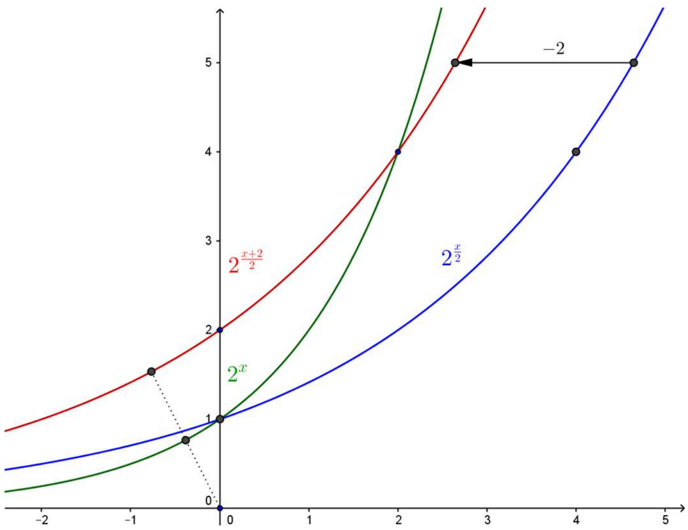
a) $y = 2^x$
Abbildungsgleichungen:
$x' = x + 3$ und damit $x = x' - 3$
$y' = y$
Gleichung der Bildkurve $\quad y' = 2^{x'-3}$

b) Gleichung der Bildkurve $\quad y' = 2^{-x'}$

c) Gleichung der Bildkurve : $\quad y' = \frac{1}{2} \cdot 2^{-x'} = 2^{-x'-1}$

d) Gleichung der Bildkurve : $\quad y' = 2^{2x'} = 4^{x'}$

e) Abbildungsgleichungen :
$x' = 2 \cdot x$ und damit $x = \frac{1}{2} \cdot x'$
$y' = 2 \cdot y$ und damit $y = \frac{1}{2} \cdot y'$
Gleichung der Bildkurve :
$\frac{1}{2} \cdot y' = 2^{\frac{1}{2} \cdot x'}$ oder
$y' = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2} \cdot x'} = 2^{\frac{1}{2}(x'+2)}$



Vorgehen zur Bestimmung der Gleichung einer Bildkurve:

1.
Drücken Sie die Koordinaten (x, y) in den Bildkoordinaten (x´, y´) aus.
2.
Ersetzen Sie mit 1. in der Gleichung der Originalkurve die Koordinaten (x, y) durch (x´, y´)