

2. Die Eulersche Zahl als Vorzugsbasis

Die Skizze im ersten Abschnitt zeigt, dass die Tangentensteigung an der Stelle 0 mit wachsendem a zunimmt.

Frage:

Für welchen Wert der Basis a hat die zugehörige Exponentialkurve an der Stelle 0 die Steigung 1? Die Antwort ergibt sich mit der Lösung der folgenden

Aufgabe:

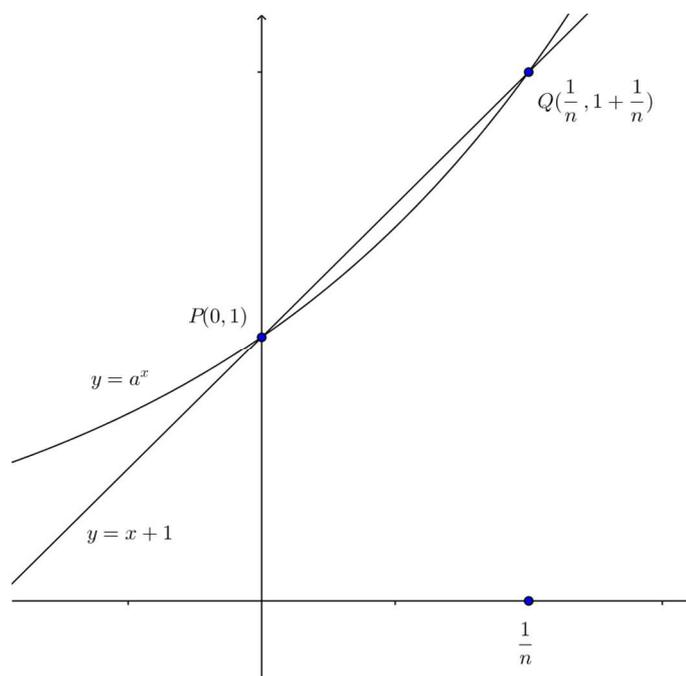
Die Kurve $y = a^x$ soll die Gerade $y = x + 1$ ausser im Punkt $P(0, 1)$ auch im Nachbarpunkt $Q(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ schneiden. Berechnen Sie die Basis a in Funktion von n .

Q erfüllt die Geradengleichung

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{also gilt} \quad a = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Wächst n über alle Grenzen so kommt Q schliesslich P beliebig nahe. Die Gerade wird zur Tangente der zugehörigen Exponentialkurve.

n	$a = (1 + \frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
5	2.48832..
10	2.5937..
100	2.704..
1000000000	2.718281827..



Die Werte scheinen sich mit

wachsendem n einer bestimmten Zahl zu nähern. Dieser eindeutig bestimmte Grenzwert heisst nach dem berühmten Mathematiker Euler (1707-1783) Eulersche Zahl und wird mit e bezeichnet

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 2.718281828459045\dots \quad \text{Taschenrechnerwert}$$

e ist eine irrationale Zahl, d.h. die Dezimalbruchentwicklung von e ist weder periodisch noch abbrechend. e spielt in der Mathematik die Rolle der Vorzugsbasis. Die Bedeutung von e ist mit der von π vergleichbar.