2. Die Eulersche Zahl als Vorzugsbasis

Die Skizze im ersten Abschnitt zeigt, dass die Tangentensteigungen der Exponentialkurven an der Stelle 0 mit wachsendem a zunehmen.

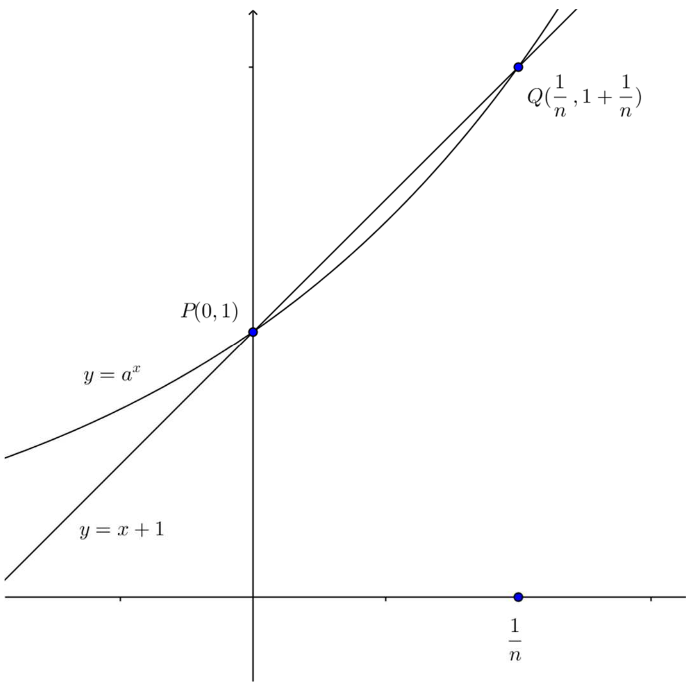
Frage:
Für welchen Wert der Basis a hat die zugehörige Exponentialkurve an der Stelle 0 die Steigung 1?
Die Antwort ergibt sich mit der Lösung der folgenden

Aufgabe:
Die Kurve $y = a^x$ soll die Gerade $y = x + 1$ ausser im Punkt P(0, 1) auch im Nachbarpunkt $Q(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$ für n = 1, 2, 3, ... schneiden. Welcher Zusammenhang besteht zwischen a und n?

Q erfüllt die Geradengleichung
$a^{\frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{n}$ also gilt

$a = (1+\frac{1}{n})^n$

Wächst n über alle Grenzen so kommt Q schliesslich P beliebig nahe. Die Gerade wird zur Tangente der zugehörigen Exponentialkurve.



n	$a = (1+\frac{1}{n})^n$
1	2
2	2.25
5	2.48832..
10	2.5937..
100	2.704..
1000000000	2.718281827..

Die Werte scheinen sich mit wachsendem n einer bestimmten Zahl zu nähern. Dieser eindeutig bestimmte Grenzwert heisst nach dem berühmten Mathematiker Euler (1707-1783) Eulersche Zahl und wird mit e bezeichnet

$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 2.718281828459045...$ Taschenrechnerwert

e ist eine irrationale Zahl, d.h. die Dezimalbruchentwicklung von e ist weder periodisch noch abbrechend. e spielt in der Mathematik die Rolle der Vorzugsbasis. Die Bedeutung von e ist mit der von π vergleichbar.