3. Exponentielles Wachstum, Exponentieller Zerfall

Was versteht man in der Mathematik unter exponentiellem Wachstum?

Beispiel:
Wir nehmen an, dass sich in einer bestimmten Bakterienkultur die Anzahl der Bakterien ungefähr in einer Stunde verdoppelt.

Falls in der Probe zu Beginn 200 Bakterien gezählt werden, ist die Anzahl $f(t)$ der Bakterien

nach einer Stunde	$t = 1$	$f(1) = 200 \cdot 2^1$
nach zwei Stunden	$t = 2$	$f(2) = 200 \cdot 2^2$
nach drei Stunden	$t = 3$	$f(3) = 200 \cdot 2^3$
nach t Stunden		$f(t) = 200 \cdot 2^t$

Allgemein:

Exponentielle Wachstumsfunktion $f(t) = a \cdot b^t$ — $b > 1$ exp. Wachstum; $0 < b < 1$ exp. Zerfall

$f(0) = a$ ist der Anfangswert
b heisst Wachstumsfaktor
t Anzahl Zeiteinheiten (z.B. Sekunden, Tage, Jahre)

Bemerkung:
Wachstumsfaktor b bedeutet:
Vergrössert man t um 1, so wird der Funktionswert mit b multipliziert. Wählt man speziell b = 2 so bedeutet dies:

Exponentielles Wachstum zeichnet sich durch eine konstante Verdopplungszeit aus.

Vergleich zwischen exponentiellem Wachstum und linearem Wachstum

	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 2$
Exp. Wachstum $\boldsymbol{f(t) = a \cdot b^t}$	$a \xrightarrow{\cdot b}$	$a \cdot b^1 \xrightarrow{\cdot b}$	$a \cdot b^2 \xrightarrow{\cdot b}$	$a \cdot b^3$
Lin. Wachstum $\boldsymbol{f(t) = a + b \cdot t}$	$a \xrightarrow{+b}$	$a + b \cdot 1 \xrightarrow{+b}$	$a + b \cdot 2 \xrightarrow{+b}$	$a + b \cdot 3$

Vergrössert man t um 1, so wird
- bei **exponentiellem Wachstum** der Funktionswert mit dem Faktor b **multipliziert**.
- bei **linearem Wachstum** zum Funktionswert b **addiert** (der Graph ist eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b).

Allgemein:
Nimmt die Zeit um Δt zu, so wird der Funktionswert mit dem Wachstumsfaktor $r = b^{\Delta t}$ multipliziert. Der Wachstumsfaktor ist unabhängig von a und t, denn $f(t+\Delta t) = a \cdot b^{t+\Delta t} = a \cdot b^t \cdot b^{\Delta t} = f(t) \cdot b^{\Delta t}$.

Gehört zu Δt der Wachstumsfaktor r, dann
- gehört zur doppelten Zeit $2 \cdot \Delta t$ der Wachstumsfaktor $r \cdot r = r^2$
- gehört zur halben Zeit $\Delta t/2$ der Wachstumsfaktor $\sqrt{r}$

Beispiel:

	$t = 0$	$t = \frac{1}{2}$	$t = 1$	
lineares Wachstum	200	325	450	arithmetisches Mittel
exponentielles Wachstum	200	300	450	geometrisches Mittel

Aufgabe:
Bestimmen Sie die Einwohnerzahl $f(t)$ einer Ortschaft in den folgenden Fällen:

a) wenn $f(0) = 5000$ und sich die Einwohnerzahl in einem Jahr verdreifacht

$f(t) = 5000 \cdot 3^t$

b) wenn $f(0) = 5000$ und sich die Einwohnerzahl in zwanzig Jahren verdreifacht.

$f(20) = 5000 \cdot 3 = 5000 \cdot b^{20} \qquad b^{20} = 3 \qquad b = 3^{\frac{1}{20}}$
$f(t) = 5000 \cdot 3^{\frac{t}{20}}$

c) wenn $f(0) = 5000$ und die Einwohnerzahl jährlich um 2% zunimmt

Der Zunahme von 2% entspricht der Wachstumsfaktor $b = 1 + \frac{2}{100} = 1.02$
$f(t) = 5000 \cdot 1.02^t$

d) wenn $f(30) = 5000$ und sich die Einwohnerzahl in zwanzig Jahren verdreifacht

Ansatz:
$f(t) = a \cdot b^t$
$f(30) = a \cdot b^{30} = 5000$
$f(30+20) = 5000 \cdot 3 \qquad a \cdot b^{50} = a \cdot b^{30} \cdot b^{20} = 5000 \cdot 3 \qquad b = 3^{\frac{1}{20}}$
eingesetzt in die 1. Gleichung

$a = \frac{5000}{b^{30}} = \frac{5000}{3^{\frac{30}{20}}} \qquad f(t) = 5000 \cdot \frac{3^{\frac{t}{20}}}{3^{\frac{30}{20}}} = 5000 \cdot 3^{\frac{t-30}{20}}$

Die Zahl 20 im Nenner des Exponenten bewirkt, dass sich der Bestand statt nach einem Jahr erst nach 20 Jahren verdreifacht.
Die Ersetzung von t durch t – 30 im Zähler des Exponenten bedeutet eine Verschiebung der Zeitskala um 30 Jahre.

Übungsaufgabe:
Bei optimalen Bedingungen vermehren sich Obstfliegen in 14 Tagen auf das 400-fache.
Mit welcher Funktionsgleichung kann dieses Phänomen beschreiben werden?

$f(t) = f(0) \cdot 400^{\frac{t}{14}}$.

Das Problem, bei gegebenem Funktionswert f(t) die Zeit (im Exponenten) zu bestimmen, führt auf den Begriff des Logarithmus.