4. Logarithmen, Beispiele und Definition

Zum Potenzieren gibt es zwei Umkehrungen:

Beispiel:
- Das Problem, die Gleichung $x^3 = 8$ nach der Basis aufzulösen, führt auf das Wurzelziehen oder Radizieren mit der Lösung $x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$

- Das Problem, die Exponentialgleichung $2^x = 8$ nach dem Exponenten aufzulösen, führt auf die sogenannten Logarithmen.

Wir führen eine neue Sprechweise ein:
Statt zu sagen:
Der zu 8 gehörige **Exponent** bezüglich der Basis 2 ist 3, denn $2^3 = 8$
sagen wir:
Der **Logarithmus** von 8 zur Basis 2 ist 3 und schreiben dafür $log_2 8 = 3$

> Definition:
> Die Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$ heisst Logarithmus von b zur Basis a, symbolisch: $log_a b = x$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muss um b zu erhalten. **Logarithmen sind also Exponenten bezüglich einer vorgegebenen Basis**. Da die Exponentialfunktion für $a > 1$ streng monoton wachsen, bzw. $0 < a < 1$ streng monoton fallen, ist der Logarithmus eindeutig.

Mit der Entdeckung der Logarithmen sind die Namen Jost Bürgi (1552 – 1632), Lord Neper (1614), Harry Briggs Zehnerlogarithmen verbunden.

Beispiele:

$log_3 81 = 4$ denn $3^4 = 81$

$\log_4 \frac{1}{64} = -3$ denn $4^{-3} = \frac{1}{64}$

$\log_2 8^4 = \log_2 2^{3 \cdot 4} = \log_2 2^{12} = 12$

$\log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$

$log_5(-2)$ ist nicht definiert

Aufgabe:
Welche Lösungen haben die folgenden Gleichungen?:

$log_x 8 = 3$ $\quad x = 2$

$\log_3 x = -2$ $\quad x = \frac{1}{9}$

$log_{81} 27 = x$

$81^x = 27 \quad 3^{4x} = 3^3$ $\quad x = \frac{3}{4}$ wegen der Gleichheit der Exponenten

$\frac{log_2 512}{log_2 8} = x$ $\quad x = \frac{log_2 2^9}{log_2 2^3} = \frac{9}{3} = 3$

Allgemein:

$log_a a = 1$ denn $a^1 = a$

$log_a 1 = 0$ denn $a^0 = 1$

$log_a 0$ ist nicht definiert, denn die Gleichung $a^x = 0$ hat für a > 0 keine reelle Lösung.

$\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}$ denn $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\log_a \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = -\frac{2}{3}$

$log_{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{a^2\sqrt{a}}\right) = -5$

Häufig verwendete Basen:

Basis 10	$\lg x = log_{10}x$	Zehnerlogarithmen
Basis 2	$\mathrm{lb}\, x = log_2 x$	Zweierlogarithmus, binärer Logarithmus
Basis e = 2.718281828459045...	$\ln x = log_e x$	natürlicher Logarithmus (Vorzugsbasis)

Beispiele:

$\lg 0.0001 = -4$

$lb(4 \cdot \sqrt{2}) = lb(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = lb 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

$ln\, e = 1, \quad ln\, e^2 = 2 \quad \ln\frac{1}{e} = -1, \quad \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$log_a a^k = k$

Die Exponentialfunktion ist die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion:

$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a \Leftrightarrow b^{\log_b a} = a$

Beispiele:

$\mathrm{lb}\, 8 = 3$ ist gleichbedeutend mit $2^3 = 8$ also gilt $2^{\mathrm{lb}\, 8} = 8$

$3^{\log_3 7} = 7$

$e^{\ln 5} = 5$

$\ln e^3 = 3$

Aufgabe:

Lösen Sie die Gleichung: $10^{2\lg x} = 25$

$(10^{\lg x})^2 = x^2 = 25$ $\quad x = 5$ (x muss positiv sein!)

$10^{1+\lg x} = 1 + x$ $\quad 10^1 \cdot 10^{\lg x} = 10x = 1 + x$ $\quad x = \frac{1}{9}$

Zusammenfassung:

Sind in der Gleichung $a^k = b$

a > 0 und k ∈ R gegeben, so ergibt sich b durch **Potenzieren**

b > 0 und k ∈ $R^+ \setminus \{1\}$ gegeben, so ergibt sich a durch **Radizieren**: $a = \sqrt[k]{b} = b^{\frac{1}{k}}$

a ∈ $R^+ \setminus \{1\}$ und b > 0 gegeben, so ergibt sich der Exponent k durch **Logarithmieren** $k = \log_a b$

Zur Existenz der Logarithmen

Wie das folgende Beispiel zeigt, können Logarithmen durch eine Intervallschachtelung definiert werden.

$\log_{10} 2 = x$ ist gleichbedeutend mit $10^x = 2$

$10^x = 2$	$10^0 = 1 \le 10^x \le 10^1$	$0 < x < 1$
$10^{2x} = 2^2 = 4$	$10^0 = 1 \le 10^{2x} \le 10^1$	$0 < x < \frac{1}{2}$
$10^{4x} = 2^4 = 16 \le 10^2$	$10^1 = 10 \le 10^{4x} \le 10^2$	$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$
$10^{8x} = 2^8 = 256 \le 10^3$	$10^2 \le 10^{8x} \le 10^3$	$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{8}$
$10^{16x} = 2^{16} = 65536 \le 10^5$	$10^4 \le 10^{16x} \le 10^5$	$\frac{1}{4} < x < \frac{5}{16}$

...

Bei der Verwendung von Logarithmen war man früher auf Tabellen angewiesen werden. Heute übernimmt diese Rolle der Taschenrechner. Im Schwerpunktfach werden Reihenentwicklungen hergeleitet (→FuT).

Die Logarithmen sind in der Regel irrationale Zahlen

Beispiel: $\log_{10} 2 \notin Q$

Der Beweis erfolgt indirekt:

Wir nehmen an, es gäbe geeignete Werte p, q ≠ 0, so dass gilt: $10^{\frac{p}{q}} = 2$
dann würde gelten:
$10^p = 2^q$ oder $2^p \cdot 5^p = 2^q$ bzw. $5^p = 2^{q-p}$
im Widerspruch zur eindeutigen Primzahlzerlegung.