

4. Logarithmen, Beispiele und Definition

Zum Potenzieren gibt es zwei Umkehrungen:

Beispiel:

- Das Problem, die Gleichung $x^3 = 8$ nach der Basis aufzulösen, führt auf das Wurzelziehen

oder Radizieren mit der Lösung $x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$

- Das Problem, die Exponentialgleichung $2^x = 8$ nach dem Exponenten aufzulösen, führt auf die sogenannten Logarithmen.

Wir führen eine neue Sprechweise ein:

Statt zu sagen: Der zu 8 gehörige **Exponent** bezüglich der Basis 2 ist 3, denn $2^3 = 8$

sagen wir: Der **Logarithmus** von 8 zur Basis 2 ist 3 und schreiben dafür $\log_2 8 = 3$

Definition:

Die Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit $a > 0$, $a \neq 1$ und $b > 0$ heisst Logarithmus von b zur Basis a, symbolisch: $\log_a b = x$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muss um b zu erhalten. **Logarithmen sind also Exponenten bezüglich einer vorgegebenen Basis.** Da die Exponentialfunktion für $a > 1$ streng monoton wachsen, bzw. $0 < a < 1$ streng monoton fallen, ist der Logarithmus eindeutig.

Mit der Entdeckung der Logarithmen sind die Namen Jost Bürgi (1552 – 1632), Lord Neper (1614), Harry Briggs Zehnerlogarithmen verbunden.

Beispiele:

$$\log_3 81 = 4 \text{ denn } 3^4 = 81$$

$$\log_4 \frac{1}{64} = -3 \text{ denn } 4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$\log_2 8^4 = \log_2 2^{3 \cdot 4} = \log_2 2^{12} = 12$$

$$\log_2 \sqrt[3]{16} = \log_2 2^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\log_5(-2) \quad \text{ist nicht definiert}$$

Aufgabe:

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\log_x 8 = 3 \quad x = 2$$

$$\log_3 x = -2 \quad x = \frac{1}{9}$$

$$\log_{81} 27 = x$$

$$81^x = 27 \quad 3^{4x} = 3^3 \quad x = \frac{3}{4} \text{ wegen der Gleichheit der Exponenten}$$

$$\frac{\log_2 512}{\log_2 8} = x \quad x = \frac{\log_2 2^9}{\log_2 2^3} = \frac{9}{3} = 3$$

Allgemein:

$$\log_a a = 1 \quad \text{denn } a^1 = a$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{denn } a^0 = 1$$

$\log_a 0$ ist nicht definiert, denn die Gleichung $a^x = 0$ hat für $a > 0$ keine reelle Lösung.

$$\log_a a^k = k$$

$$\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2} \quad \text{denn } \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_a \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{a^2 \sqrt{a}} \right) = -5$$

Häufig verwendete Basen:

Basis 10 $\lg x = \log_{10} x$ Zehnerlogarithmen

Basis 2 $\lg x = \log_2 x$ Zweierlogarithmus, binärer Logarithmus

Basis $e = 2.718281828459045\dots$ $\ln x = \log_e x$ natürlicher Logarithmus (Vorzugsbasis)

Beispiele:

$$\lg 0.0001 = -4$$

$$\lg(4 \cdot \sqrt{2}) = \lg(2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}) = \lg 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$\ln e = 1, \quad \ln e^2 = 2, \quad \ln \frac{1}{e} = -1, \quad \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$$

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$$x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a \Leftrightarrow b^{\log_b a} = a$$

Beispiele:

$$\lg 8 = 3 \text{ ist gleichbedeutend mit } 2^3 = 8 \text{ also gilt } 2^{\lg 8} = 8$$

$$3^{\lg_3 7} = 7$$

$$e^{\ln 5} = 5$$

$$\ln e^3 = 3$$

Aufgabe:

Lösen Sie die Gleichung: $10^{2 \lg x} = 25$

$$(10^{\lg x})^2 = x^2 = 25 \quad x = 5 \text{ (} x \text{ muss positiv sein!)}$$

$$10^{1 + \lg x} = 10 \cdot x \quad 10^1 \cdot 10^{\lg x} = 10x = 10 + x \quad x = \frac{1}{9}$$

Zusammenfassung:

Sind in der Gleichung $a^k = b$

$a > 0$ und $k \in \mathbb{R}$ gegeben, so ergibt sich b durch **Potenzieren**

$b > 0$ und $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gegeben, so ergibt sich a durch **Radizieren**: $a = \sqrt[k]{b} = b^{\frac{1}{k}}$

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b > 0$ gegeben, so ergibt sich der Exponent k durch

Logarithmieren $k = \log_a b$

Zur Existenz der Logarithmen

Wie das folgende Beispiel zeigt, können Logarithmen durch eine Intervallschachtelung definiert werden.

$\log_{10} 2 = x$ ist gleichbedeutend mit $10^x = 2$

$10^x = 2$	$10^0 = 1 \leq 10^x \leq 10^1$	$0 < x < 1$
$10^{2x} = 2^2 = 4$	$10^0 = 1 \leq 10^{2x} \leq 10^1$	$0 < x < \frac{1}{2}$
$10^{4x} = 2^4 = 16 \leq 10^2$	$10^1 = 10 \leq 10^{4x} \leq 10^2$	$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$
$10^{8x} = 2^8 = 256 \leq 10^3$	$10^2 \leq 10^{8x} \leq 10^3$	$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{8}$
$10^{16x} = 2^{16} = 65536 \leq 10^5$	$10^4 \leq 10^{16x} \leq 10^5$	$\frac{1}{4} < x < \frac{5}{16}$

...

Bei der Verwendung von Logarithmen war man früher auf Tabellen angewiesen werden. Heute übernimmt diese Rolle der Taschenrechner. Im Schwerpunktfach werden Reihenentwicklungen hergeleitet (\rightarrow FuT).

Die Logarithmen sind in der Regel irrationale Zahlen

Beispiel: $\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}$

Der Beweis erfolgt indirekt:

Wir nehmen an, es gäbe geeignete Werte $p, q \neq 0$, so dass gilt: $10^{\frac{p}{q}} = 2$
dann würde gelten:

$$10^p = 2^q \text{ oder } 2^p \cdot 5^p = 2^q \text{ bzw. } 5^p = 2^{q-p}$$

im Widerspruch zur eindeutigen Primzahlzerlegung.