

5. Logarithmengesetze

Bei den Logarithmengesetzen handelt es sich eigentlich um eine Umformulierung der Potenzgesetze.

einführende Beispiele:

$$lb(16 \cdot 64) = lb(2^4 \cdot 2^6) = lb(2^{4+6}) = 4 + 6 = lb 16 + lb 64 \quad \text{Logarithmen werden addiert}$$

$$lb\left(\frac{32}{4}\right) = lb\left(\frac{2^5}{2^2}\right) = lb(2^{5-2}) = 5 - 2 = lb 32 - lb 4 \quad \text{Logarithmen werden subtrahiert}$$

$$lb\left(\frac{1}{8}\right) = lb\left(\frac{1}{2^3}\right) = lb(2^{-3}) = -3 = -lb 8 \quad \text{Der Logarithmus wechselt das Vorzeichen}$$

$$lb(8^4) = lb\left((2^3)^4\right) = lb(2^{3 \cdot 4}) = 4 \cdot 3 = 4 \cdot lb 8 \quad \text{Logarithmen werden multipliziert}$$

$$lb(\sqrt{16}) = lb\left(16^{\frac{1}{2}}\right) = lb\left((2^4)^{\frac{1}{2}}\right) = lb\left(2^{4 \cdot \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot lb 16$$

Allgemein gelten für jede zulässige Basis die folgenden

Logarithmengesetze

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v \quad (1) \text{ Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen}$$

$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log u - \log v \quad (2) \text{ Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen}$$

$$\log\left(\frac{1}{v}\right) = -\log v \quad (2') \text{ Logarithmus des Kehrwerts}$$

$$\log(u^k) = k \cdot \log u \quad (3) \text{ Logarithmus einer Potenz}$$

Beweis:

In der Logarithmensprache

$$x = \log_a u$$

$$y = \log_a v$$

$$\log_a(uv) = x + y = \log_a u + \log_a v$$

In der exponentiellen Sprache

$$a^x = u$$

$$a^y = v$$

$$uv = a^{x+y}$$

Zu beachten:

$$lb(16+4) \neq lb 16 + lb 4$$

$$lb(16-4) \neq lb 16 - lb 4$$

$$lb 4 \cdot lb 8 \neq lb(4 \cdot 8)$$

$$lb\left(\frac{32}{4}\right) \neq \frac{lb 32}{lb 4}$$

Allgemein:

$$\log(u + v) \neq \log u + \log v$$

Der Logarithmus einer Summe ist i.a. **nicht** gleich der Summe der Logarithmen

$$\log(u - v) \neq \log u - \log v$$

Der Logarithmus einer Differenz ist i.a. **nicht** gleich der Differenz der Logarithmen

$$\log(u) \cdot \log(v) \neq \log(uv)$$

Der Logarithmus eines Produkts ist i. a. **nicht** gleich dem Produkt der Logarithmen

$$\frac{\log u}{\log v} \neq \log\left(\frac{u}{v}\right)$$

Der Logarithmus eines Quotienten ist i.a. **nicht** gleich dem Quotienten der Logarithmen

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Logarithmengleichungen.

a) $\log(x+3) = \log x + \log 3$

$$\log(x+3) = \log x + \log 3 = \log(3x)$$

Aus der Gleichheit der Logarithmen folgt die Gleichheit der zugehörigen Zahlen.

$$\log(x+3) = \log(3x) \quad x+3 = 3x \quad x = \frac{3}{2}$$

b) $\lg(9x+5) - \lg x = 1$

$$\lg(9x+5) - \lg x = \lg\left(\frac{9x+5}{x}\right) = 1 \quad \frac{9x+5}{x} = 10 \quad x = 5$$

c) $\log(x+4) + \log x = 2 \cdot \log(x+1)$

$$\log(x \cdot (x+4)) = \log((x+1)^2) \quad x \cdot (x+4) = (x+1)^2 \quad x = \frac{1}{2}$$

d) $\frac{1}{2} \cdot \lg(x+1) = 1 - \lg 2$

$$\frac{1}{2} \cdot \lg(x+1) = \lg(x+1)^{\frac{1}{2}} = \lg 10 - \lg 2 = \lg\left(\frac{10}{2}\right) = \lg 5$$

$$\sqrt{x+1} = 5 \quad \text{quadrieren} \quad x+1 = 25 \quad x = 24$$

Die Probe stimmt.

e) $x = \lg 1 + \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \dots + \lg \frac{99}{100}$

$$\begin{aligned} x &= \lg 1 + (\lg 1 - \lg 2) + (\lg 2 - \lg 3) + \dots + (\lg 98 - \lg 99) + (\lg 99 - \lg 100) \\ &= -\lg 100 = -2 \end{aligned}$$

Aufgabe:

Wie heissen die Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} \lg xy = 3 \\ \lg \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

Lösung:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 3 \\ \lg x - \lg y = 1 \end{cases}$$

Addition der beiden Gleichungen führt auf $\lg x = 2$ und auf $\lg y = 1$ mit den Lösungen $x = 100$ und $y = 10$.