7. Exponentialgleichungen

1. Typ:
Lässt sich die Exponentialgleichung auf eine Form bringen, in der keine Operationen 1. Stufe vorkommen, so kann man die beiden Seiten bezüglich einer zulässigen Basis, zB. 2, 10 oder e logarithmieren.

Beispiele:
a)

$2^x = 7$ logarithmiert zur Basis 10

$x = \frac{\lg 7}{\lg 2} \approx 2.807354922...$ nicht zu verwechseln mit

$lg\left(\frac{7}{2}\right) = lg\, 7 - lg\, 2$

b)

$3 \cdot 5^x = 7^{x-1}$ logarithmieren zur Basis 10, ordnen

$x \cdot (\ln 5 - \ln 7) = -(\ln 7 + \ln 3)$

$x = \frac{\ln(3 \cdot 7)}{\ln(\frac{7}{5})} \approx 9.048$

Anwendung:
Berechnung des Logarithmus einer Zahl z zu einer neuen zulässigen Basis a aus den Zehnerlogarithmen.

$\log_4 0.02 = y$

Die Gleichung ist gleichbedeutend mit der $4^y = 0.02$

logarithmiert zur Basis 10 $y = \log_4 0.02 = \frac{\lg 0.02}{\lg 4} \approx -2.8219...$

Allgemein:

$log_a\, x = y$

Die Exponentialgleichung: $a^y = x$ kann durch Logarithmieren zur Basis 10 oder e nach y aufgelöst werden:

$$\log_a x = \frac{1}{\lg a} \cdot \lg x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$ Basiswechsel

Interpretation:
Man erhält also die Logarithmen bezüglich einer neuen Basis a, indem man die Zehnerlogarithmen mit dem Kehrwert vom Logarithmus der neuen Basis multipliziert.

Beispiel:

$\log_\pi 51 = \frac{1}{\lg \pi} \cdot \lg 51 \approx 3.4347..$

Aufgabe:
Wie oft muss man ein A4-Blatt Kopierpapier falten, bis die Papierschicht (theoretisch) mindestens 1 m dick ist? Zusatzinformation: 1 Paket mit 500 Blatt Kopierpapier hat eine Höhe von 5.5 cm.

Bemerkung: In der Praxis ist das Falten höchstens 7- bis 8-mal möglich.

Bei jeder Faltung verdoppelt sich die Höhe

$0.11 \cdot 2^n > 1000$ Einheit: mm Gleichungen logarithmieren

$\lg 0.11 + n \cdot \lg 2 > 3$ $\quad n > \dfrac{3 - \lg 0.11}{\lg 2}$ $\quad n \geq 14$

Zusatzfrage:
Wie oft muss man falten, damit der Papierturm theoretisch grösser als die Monddistanz wird? (Monddistanz: $3.844 \cdot 10^8$ m).

2. Typ:
Kommen in der Exponentialgleichung Operationen 1. Stufe vor, so hilft hin und wieder eine Substitution.

Beispiele:
a)

$5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$ ja nicht logarithmieren, sondern Substitution

$z = 5^x \qquad 5^{-x} = \dfrac{1}{5^x} = \dfrac{1}{z}$ mit $z \neq 0$ multiplizieren

$5z^2 + 1 = 6z$ oder Diskriminante $D = 16$

$z_{1,2} = \dfrac{6 \pm 4}{10}$

$z_1 = 5^x = 1$ $\quad x_1 = 0$ oder $z_2 = \frac{1}{5} = 5^{-1} = 5^x$ $\quad x_2 = -1$

$z_1 = 5^x = \frac{1}{5}$ $\quad x_2 = -1$

b)

$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ Substitution $z = 3^x$

$z^2 - 2z - 3 = (z+1) \cdot (z-3) = 0$

$z_1 = 3^x = -1$ Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

$z_2 = 3^x = 3$ $\quad x = 1$

c)

$2^x + 2^{-x} = 4$ Substitution $z = 2^x \qquad 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{z}$

$z + \dfrac{1}{z} = 4$ mit z multiplizieren

$z^2 - 4z + 1 = 0$ $\quad D = 12$

$u_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = lb(2 + \sqrt{3}) \approx 1.899969$ $\qquad x_2 = lb(2 - \sqrt{3}) \approx -1.899969$

Wegen der speziellen Form der Ausgangsgleichung ist mit x auch -x Lösung.

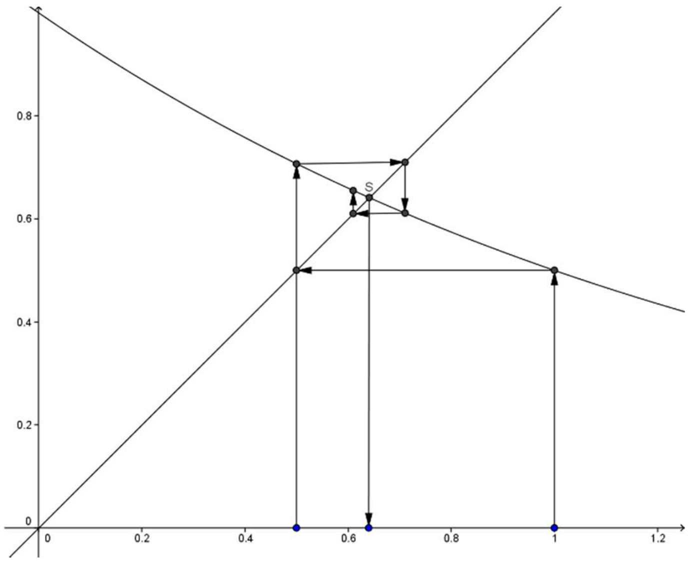
denn $2 + \sqrt{3} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}}$

Die beiden folgenden numerischen Verfahren können zunächst übergangen werden.
Näheres dazu bei
http://mathekurs.ch/pdf/analysis2/nummath/Microsoft_Word_-_Iteration_neu.pdf

3. Typ: Viele Exponentialgleichungen sind nur mit Näherungsverfahren lösbar.

Beispiel:
$2^{-x} = x$

1. Verfahren: Fixpunktverfahren



In der Abbildung sind die Kurven mit den Gleichungen
$y = 2^{-x}$ und $y = x$
dargestellt. In ihrem Schnittpunkt S stimmen die y-Werte der beiden Kurven überein, d.h. es gilt:
$2^{-x} = x$
Wählt man nun einen Startwert z.B. $x_1 = 1$ und daraus für k = 1, 2, 3, ..
$x_{k+1} = 2^{-x_k}$, so entspricht dies dem spiralförmigen Streckenzug um S in der Abbildung.

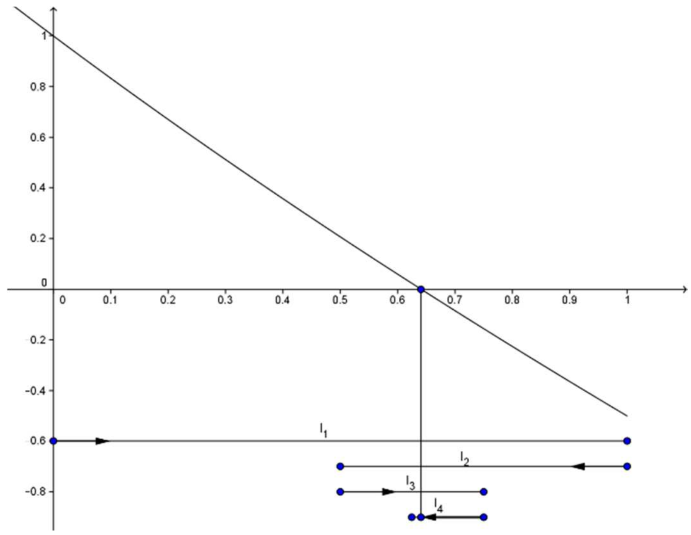
Schrittweise ergeben sich die folgenden x-Werte:

1 (zu gross) → 0.5 (zu klein) → 0.71 (zu gross) → 0.61 (zu klein) ……, d.h. es gilt $2^{-x} = x$.

Die x-Koordinate des Schnittpunkts liefert die Näherungslösung x ≈ 0.641

2. Verfahren: Bisektionsalgorithmus

Das Verfahren wird am gleichen Beispiel $2^{-x} = x$ erläutert.
Die Gleichung wird zunächst auf die Form $f(x) = 2^{-x} - x = 0$ gebracht.
In der Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Funktion f im Intervall $I_1 = [0,1]$ das Vorzeichen wechselt.
Da f in diesem Intervall stetig ist (der Graph kann sich nicht sprunghaft ändern) hat f in diesem Intervall eine Nullstelle und die gegebene Gleichung eine Lösung. Diese kann nun schrittweise durch Halbieren des Intervalls angenähert werden.



In der Intervallmitte 0.5 ist $f(0.5) \approx 0.2$ also positiv. Damit hat f im Intervall $I_2 = [0.5, 1]$ einen Vorzeichenwechsel. In der Intervallmitte 0.75 von I_2 ist $f(0.75)$ negativ, also liegt die gesuchte Nullstelle im Intervall $I_3 = [0.5, 0.75]$ usf.
Auf diese Weise erhält man eine Folge von Intervallen, deren Länge bei jedem Schritt halbiert wird.
$I_1 = [0,1] \rightarrow I_2 = [0.5, 1] \rightarrow I_3 = [0.5, 0.75] \rightarrow I_4 = [0.625, 0.75] \rightarrow \ldots$

Aus der folgenden Excel-Tabelle ergibt sich schliesslich gesuchte Nullstelle mit einer Genauigkeit von 6 Stellen zu x ≈ .641185.

Der Vorteil dieses einfachen Verfahrens (Bisektionsverfahren) liegt darin, dass ausser der Stetigkeit von f keine weiteren Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Der Nachteil besteht darin, dass sich die Genauigkeit nur langsam verbessert. Da $2^{10} = 1024 \approx 1000$ werden etwa 10 Schritte gebraucht, um drei weitere Dezimalen zu ermitteln.

n	a	b	f(a)	f(b)	m	f(m)
	untere Grenze	obere Grenze	positiv	negativ	Mitte	
0	**0**	**1**	1.000000000	-0.500000000	0.5	0.207106781
1	**0.5**	**1**	0.207106781	-0.500000000	0.75	-0.155396442
2	**0.5**	**0.75**	0.207106781	-0.155396442	0.625	0.023419777
3	**0.625**	**0.75**	0.023419777	-0.155396442	0.6875	-0.066571094
4	0.625	0.6875	0.023419777	-0.066571094	0.65625	-0.021724521
5	0.625	0.65625	0.023419777	-0.021724521	0.640625	0.000810008
6	0.6406	0.65625	0.000810008	-0.021724521	0.6484375	-0.010466611
7	0.6406	0.6484	0.000810008	-0.010466611	0.64453125	-0.004830646
8	0.6406	0.6445	0.000810008	-0.004830646	0.64257813	-0.002010906
9	0.6406	0.6426	0.000810008	-0.002010906	0.64160156	-0.000600596
10	0.6406	0.6416	0.000810008	-0.000600596	0.64111328	0.000104669
11	0.64111	0.64160	0.000104669	-0.000600596	0.64135742	-0.000247972
12	0.64111	0.64136	0.000104669	-0.000247972	0.64123535	-7.16538E-05
13	0.64111	0.64124	0.000104669	-0.000071654	0.64117432	1.65072E-05
14	0.64117	0.64124	0.000016507	-0.000071654	0.64120483	-2.75735E-05
15	0.64117	0.64120	0.000016507	-0.000027573	0.64118958	-5.53319E-06
16	0.64117	0.64119	0.000016507	-0.000005533	0.64118195	5.48699E-06
17	0.641182	0.641190	0.000005487	-0.000005533	0.64118576	-2.3101E-08
18	0.641182	0.6411858	0.000005487	-0.000000023	0.64118385	2.73194E-06
19	0.641184	0.6411858	0.000002732	-0.000000023	0.64118481	1.35442E-06
20	0.6411848	0.6411858	0.000001354	-0.000000023	0.64118528	6.6566E-07
21	0.6411853	0.6411858	0.000000666	-0.000000023	0.64118552	3.21279E-07
22	**0.6411855**	**0.64118576**	0.000000321	-0.000000023	0.64118564	1.49089E-07

Allgemeiner Algorithmus zur Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$.

Voraussetzung:
Die Funktion f sei im Intervall [a, b] stetig und es sei f(a)·f(b) < 0 d.h. d.h. f hat an den Intervallgrenzen verschiedenes Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz hat dann f mindestens eine Nullstelle im Intervallinneren, d.h. der Graph von f schneidet mindestens einmal die x-Achse.

o.B.d.A. sei f(a) < 0 (andernfalls kann man die Gleichung mit (-1) multiplizieren).

Bisektionsalgorithmus (nach Gander: Numerische Verfahren, Birkhäuser):

x := (a + b)/2	bestimme die Intervallmitte
(*) while (b - a) > ε do	tue solange die gewünschte Genauigkeit nicht
begin	erreicht ist das folgende:
if f(x) > 0 then b := a else a := x	Wahl des nächsten Intervalls
x := (a + b)/2	neue Intervallmitte
end.	

(*) Verbesserte Abbruchbedingung: **while (a < x) and (x < b)**