

7. Exponentialgleichungen

1. Typ:

Lässt sich die Exponentialgleichung auf eine Form bringen, in der keine Operationen 1. Stufe vorkommen, so kann man die beiden Seiten bezüglich einer zulässigen Basis, zB. 2, 10 oder e logarithmieren.

Beispiele:

a)

$$2^x = 7$$

logarithmiert zur Basis 10

$$x = \frac{\lg 7}{\lg 2} \approx 2.807354922\dots$$

nicht zu verwechseln mit

$$\lg\left(\frac{7}{2}\right) = \lg 7 - \lg 2$$

b)

$$3 \cdot 5^x = 7^{x-1}$$

logarithmieren zur Basis 10, ordnen

$$x \cdot (\ln 5 - \ln 7) = -(\ln 7 + \ln 3)$$

$$x = \frac{\ln(3 \cdot 7)}{\ln\left(\frac{7}{5}\right)} \approx 9.048$$

Anwendung:

Berechnung des Logarithmus einer Zahl z zu einer neuen zulässigen Basis a aus den Zehnerlogarithmen.

$$\log_4 0.02 = y$$

Die Gleichung ist gleichbedeutend mit der

$$4^y = 0.02$$

logarithmiert zur Basis 10

$$y = \log_4 0.02 = \frac{\lg 0.02}{\lg 4} \approx -2.8219\dots$$

Allgemein:

$$\log_a x = y$$

Die Exponentialgleichung: $a^y = x$ kann durch Logarithmieren zur Basis 10 oder e nach y aufgelöst werden:

$$\log_a x = \frac{1}{\lg a} \cdot \lg x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

Basiswechsel

Interpretation:

Man erhält also die Logarithmen bezüglich einer neuen Basis a, indem man die Zehnerlogarithmen mit dem Kehrwert vom Logarithmus der neuen Basis multipliziert.

Beispiel:

$$\log_\pi 51 = \frac{1}{\lg \pi} \cdot \lg 51 \approx 3.4347\dots$$

Aufgabe:

Wie oft muss man ein A4-Blatt Kopierpapier falten, bis die Papierschicht (theoretisch) mindestens 1 m dick ist? Zusatzinformation: 1 Paket mit 500 Blatt Kopierpapier hat eine Höhe von 5.5 cm.

Bemerkung: In der Praxis ist das Falten höchstens 7- bis 8-mal möglich.

Bei jeder Faltung verdoppelt sich die Höhe

$0.11 \cdot 2^n > 1000$ Einheit: mm Gleichungen logarithmieren

$$\lg 0.11 + n \cdot \lg 2 > 3 \quad n > \frac{3 - \lg 0.11}{\lg 2} \quad n \geq 14$$

Zusatzfrage:

Wie oft muss man falten, damit der Papierturm theoretisch grösser als die Mondsdistanz wird? (Mondsdistanz: $3.844 \cdot 10^8$ m).

2. Typ:

Kommen in der Exponentialgleichung Operationen 1. Stufe vor, so hilft hin und wieder eine Substitution.

Beispiele:

a)

$$5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$$

ja nicht logarithmieren, sondern Substitution

$$z = 5^x \quad 5^{-x} = \frac{1}{5^x} = \frac{1}{z}$$

mit $z \neq 0$ multiplizieren

$$5z^2 + 1 = 6z \quad \text{oder}$$

Diskriminante $D = 16$

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{10}$$

$$z_1 = 5^x = 1$$

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad z_2 = \frac{1}{5} = 5^{-1} = 5^x \quad x_2 = -1$$

$$z_1 = 5^x = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = -1$$

b)

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Substitution $z = 3^x$

$$z^2 - 2z - 3 = (z+1) \cdot (z-3) = 0$$

Die Gleichung hat keine reelle Lösung.

$$z_1 = 3^x = -1$$

$$x = 1$$

$$z_2 = 3^x = 3$$

c)

$$2^x + 2^{-x} = 4$$

Substitution $z = 2^x$ $2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \frac{1}{z}$

$$z + \frac{1}{z} = 4$$

mit z multiplizieren

$$z^2 - 4z + 1 = 0$$

$D = 12$

$$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = \lg(2 + \sqrt{3}) \approx 1.899969$$

$$x_2 = \lg(2 - \sqrt{3}) \approx -1.899969$$

Wegen der speziellen Form der Ausgangsgleichung ist mit x auch $-x$ Lösung.

$$\text{denn } 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

mit $(2 + \sqrt{3})$ erweitern.

Eine „Knacknuss“ (*)

Die Zahl 7680321 ist im Neunersystem gegeben. Wieviele Stellen hat diese Zahl im Dualsystem?

Gemäss Kapitel Potenzen -> Nichtdezimale Zahlensysteme kann die Zahl im Dezimalsystem dargestellt werden. Dies kann mit dem Horner Schema durchgeführt werden (wobei mit der Basis 9 zu multiplizieren ist). Die gesuchte Dezimalzahl ist 4 127 131.

Die Stellenzahl im Dualsystem ergibt sich aus der Lösung der Gleichung

$$2^x = 4\,127\,131$$

Wegen $\log_2(4\,127\,131) \approx 21.976..$ ist die gesuchte Stellenzahl im Dualsystem somit 22.

Die Stellenzahl kann auch ermittelt werden, indem man 4 127 131 fortlaufend durch 2 dividiert.

Die beiden folgenden numerischen Verfahren können zunächst übergangen werden.
Näheres dazu bei
http://mathekurs.ch/pdf/analysis2/nummath/Microsoft_Word_-_Iteration_neu.pdf

3. Typ: Viele Exponentialgleichungen sind nur mit Näherungsverfahren lösbar.

Beispiel:

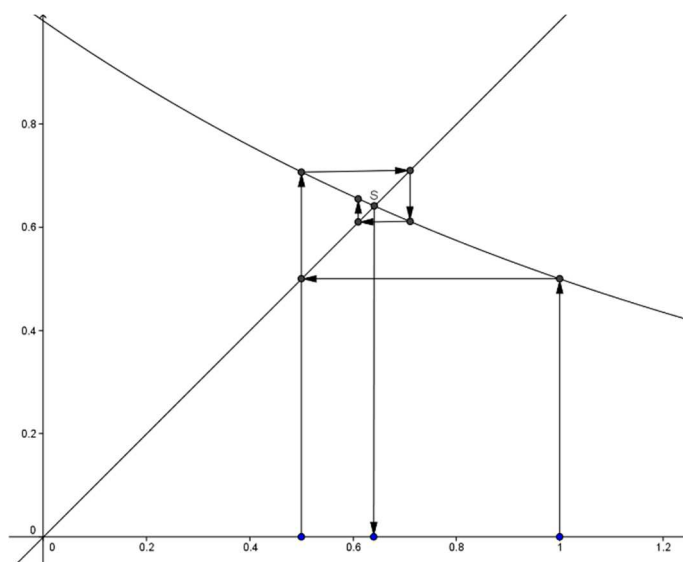
$$2^{-x} = x$$

1. Verfahren: Fixpunktverfahren

In der Abbildung sind die Kurven mit den Gleichungen $y = 2^{-x}$ und $y = x$ dargestellt. In ihrem Schnittpunkt S stimmen die y-Werte der beiden Kurven überein, d.h. es gilt:

$$2^{-x} = x$$

Wählt man nun einen Startwert z.B. $x_1 = 1$ und daraus für $k = 1, 2, 3, ..$ $x_{k+1} = 2^{-x_k}$, so entspricht dies dem spiralförmigen Streckenzug um S in der Abbildung.



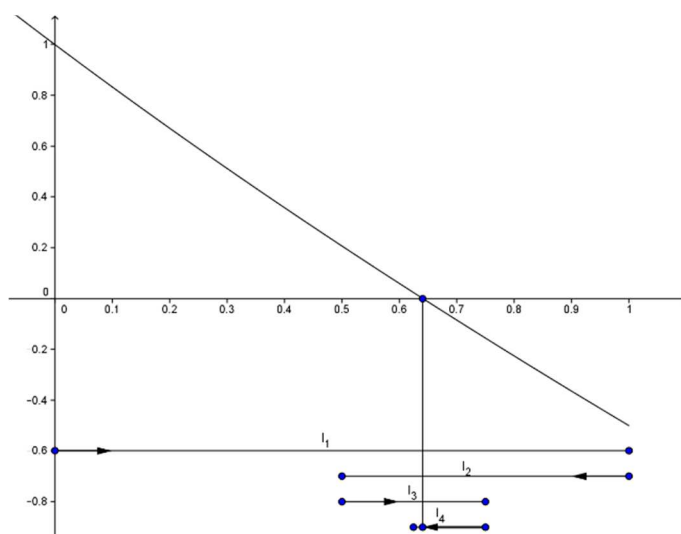
Schrittweise ergeben sich die folgenden x-Werte:

1 (zu gross) \rightarrow 0.5 (zu klein) \rightarrow 0.71 (zu gross) \rightarrow 0.61 (zu klein), d.h. es gilt $2^{-x} = x$.

Die x-Koordinate des Schnittpunkts liefert die Näherungslösung $x \approx 0.641$

2. Verfahren: Bisektionsalgorithmus

Das Verfahren wird am gleichen Beispiel $2^{-x} = x$ erläutert. Die Gleichung wird zunächst auf die Form $f(x) = 2^{-x} - x = 0$ gebracht. In der Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Funktion f im Intervall $I_1 = [0,1]$ das Vorzeichen wechselt. Da f in diesem Intervall stetig ist (der Graph kann sich nicht sprunghaft ändern) hat f in diesem Intervall eine Nullstelle und die gegebene Gleichung eine Lösung. Diese kann nun schrittweise durch Halbieren des Intervalls angenähert werden.



In der Intervallmitte 0.5 ist $f(0.5) \approx 0.2$ also positiv. Damit hat f im Intervall $I_2 = [0.5, 1]$ einen Vorzeichenwechsel. In der Intervallmitte 0.75 von I_2 ist $f(0.75)$ negativ, also liegt die gesuchte Nullstelle im Intervall $I_3 = [0.5, 0.75]$ usw.

Auf diese Weise erhält man eine Folge von Intervallen, deren Länge bei jedem Schritt halbiert wird.

$$I_1 = [0,1] \rightarrow I_2 = [0.5, 1] \rightarrow I_3 = [0.5, 0.75] \rightarrow I_4 = [0.625, 0.75] \rightarrow \dots$$

Aus der folgenden Excel-Tabelle ergibt sich schliesslich gesuchte Nullstelle mit einer Genauigkeit von 6 Stellen zu $x \approx .641185$.

Der Vorteil dieses einfachen Verfahrens (Bisektionsverfahren) liegt darin, dass ausser der Stetigkeit von f keine weiteren Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Der Nachteil besteht darin, dass sich die Genauigkeit nur langsam verbessert. Da $2^{10} = 1024 \approx 1000$ werden etwa 10 Schritte gebraucht, um drei weitere Dezimalen zu ermitteln.

n	a	b	f(a)	f(b)	m	f(m)
	untere Grenze	obere Grenze	positiv	negativ	Mitte	
0	0	1	1.000000000	-0.500000000	0.5	0.207106781
1	0.5	1	0.207106781	-0.500000000	0.75	-0.155396442
2	0.5	0.75	0.207106781	-0.155396442	0.625	0.023419777
3	0.625	0.75	0.023419777	-0.155396442	0.6875	-0.066571094
4	0.625	0.6875	0.023419777	-0.066571094	0.65625	-0.021724521
5	0.625	0.65625	0.023419777	-0.021724521	0.640625	0.000810008
6	0.6406	0.65625	0.000810008	-0.021724521	0.6484375	-0.010466611
7	0.6406	0.6484	0.000810008	-0.010466611	0.64453125	-0.004830646
8	0.6406	0.6445	0.000810008	-0.004830646	0.64257813	-0.002010906
9	0.6406	0.6426	0.000810008	-0.002010906	0.64160156	-0.000600596
10	0.6406	0.6416	0.000810008	-0.000600596	0.64111328	0.000104669
11	0.64111	0.64160	0.000104669	-0.000600596	0.64135742	-0.000247972
12	0.64111	0.64136	0.000104669	-0.000247972	0.64123535	-7.16538E-05
13	0.64111	0.64124	0.000104669	-0.000071654	0.64117432	1.65072E-05
14	0.64117	0.64124	0.000016507	-0.000071654	0.64120483	-2.75735E-05
15	0.64117	0.64120	0.000016507	-0.000027573	0.64118958	-5.53319E-06
16	0.64117	0.64119	0.000016507	-0.000005533	0.64118195	5.48699E-06
17	0.641182	0.641190	0.000005487	-0.000005533	0.64118576	-2.3101E-08
18	0.641182	0.6411858	0.000005487	-0.000000023	0.64118385	2.73194E-06
19	0.641184	0.6411858	0.000002732	-0.000000023	0.64118481	1.35442E-06
20	0.6411848	0.6411858	0.000001354	-0.000000023	0.64118528	6.6566E-07
21	0.6411853	0.6411858	0.000000666	-0.000000023	0.64118552	3.21279E-07
22	0.6411855	0.64118576	0.000000321	-0.000000023	0.64118564	1.49089E-07

Allgemeiner Algorithmus zur Lösung einer Gleichung $f(x) = 0$.

Voraussetzung:

Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ stetig und es sei $f(a) \cdot f(b) < 0$ d.h. d.h. f hat an den Intervallgrenzen verschiedenes Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz hat dann f mindestens eine Nullstelle im Intervallinneren, d.h. der Graph von f schneidet mindestens einmal die x -Achse.

o.B.d.A. sei $f(a) < 0$ (andernfalls kann man die Gleichung mit (-1) multiplizieren).

Bisektionsalgorithmus (nach Gander: Numerische Verfahren, Birkhäuser):

```

x := (a + b)/2           bestimme die Intervallmitte
(*) while (b - a) > ε do  tue solange die gewünschte Genauigkeit nicht
begin                    erreicht ist das folgende:
    if f(x) > 0 then b := a else a := x    Wahl des nächsten Intervalls
    x := (a + b)/2                neue Intervallmitte
end.

```

(*) Verbesserte Abbruchbedingung: **while (a < x) and (x < b)**