8. Ein Beispiel für exponentielles Wachstum: Zinseszins

Die Anlage von Vermögen (z.B. der Kauf eines Wertpapiers) bedeutet den temporären Verzicht auf die Möglichkeit zu konsumieren. Für diesen Verzicht wird der Investor in Form von Zinszahlungen entschädigt (im Jahre 2016 aber allenfalls mit Negativzinsen bestraft).

Aufgabe:
Auf welchen Betrag K_n (Future Value) wächst ein Anfangskapital K_0 (Present Value) bei einem gleichbleibenden Zinssatz von p% in n Jahren?

gewöhnlicher Zins (lineares Wachstum) $K_n^{'} = K_0 \cdot (1 + \frac{np}{100})$

Zinseszins (exponentielles Wachstum) $K_n = K_0 \cdot r^n$ **Zinseszinsformel (1)**

$r = 1 + \frac{p}{100}$ heisst Aufzinsfaktor.

K_0 Anfangskapital, (Present Value), investiertes Vermögen zur Zeit t = 0
K_n Endkapital (Future Value)
p Zinssatz pro Jahr
n Laufzeit der Anlage (kann auch rational sein!)

Da das Vermögen in jedem Jahr mit dem Aufzinsfaktor r multipliziert wird, handelt es sich um exponentielles Wachstum. Verdoppelt sich z.B. ein Vermögen in 12 Jahren, so wird es sich in 24 Jahren vervierfachen, in 36 Jahren verachtfachen.

• Berechnung des Endkapitals

Aufgabe:
Auf welchen Betrag wächst 1 Fr., der während 2014 Jahren zu 4% verzinst wird
a) bei gewöhnlichem Zins b) bei Zinseszins?

$K_0 = 1$ n = 2014   p = 4% (aktuell: 0.2% Postfinance)
lineares Wachstum: $K_{2014}^{'} = 81.56$ Fr.
exponentielles Wachstum $K_{2014} \approx 2.019 \cdot 10^{34}$ Fr.

Zusatzfrage:
Wie viele Erdkugeln aus reinem Gold hätten 2014 denselben Wert?
Goldpreis März 2014: 36901.92 CHF je 1 kg Gold
Erdradius: 6371 km
Dichte von Gold: $19.29 \cdot 10^3$ kg/m^3

Übungsaufgabe:
Ein Investor hat CHF 100'000.- auf einem Sparguthaben bei einer Bank angelegt. Der Zinssatz auf dem Konto beträgt 3.5% pro Jahr. Auf welchen Betrag wächst seine Anlage nach 3 Jahren, wenn sich der Zinssatz in den nächsten 3 Jahren nicht ändert und die Zinsen jeweils am Ende des Jahres dem Konto gutgeschrieben werden?

Bemerkung:
Der in den Aufgaben erwähnte Zinssatz war im vergangenen Jahrhundert üblich. Aktuell (2011) ist er durchaus noch bei den Modellrechnungen der Pensionskassen als Annahme für die langfristige Sollrendite gebräuchlich.

• Berechnung des Barwerts

Die Berechnung des Barwerts heisst Diskontieren.

Aufgabe:
Welchen Betrag muss man heute auf die Bank bringen, damit man eine in 5 Jahren fällige Schuld von Fr. 8'300.- zurückzahlen kann? (p = 4.5%)

$$K_0 = \frac{K_n}{r^n}$$

K_0 = 6660.34 Fr.

• Berechnung des Zinssatzes

$$r = \left(\frac{K_n}{K_0}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (2)$$

• Berechnung der Zeit

$$n = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln r} \qquad (3)$$

Aufgabe:
Wir nehmen an, dass die jährliche Wachstumsrate der Weltbevölkerung konstant bleibt, d.h. dass die Weltbevölkerung exponentiell wächst.
a)
Bestimme mit den folgenden Angaben für die Jahre 1950 bzw. 1970
die Bevölkerungszahl 1977 bei gleichbleibendem Wachstum.
b)
In welchem Jahr wird die Weltbevölkerung voraussichtlich 5000, 6000, 7000 Millionen betragen?

Jahr	n	Erdbevölkerung in Mio.	tatsächliche Bevölkerungszahl
1950	0	2494	2494
1970	20	3635	3635

a)
Wachstumsrate:
aus (2) mit K_0 = 2494, n = 20 und K_{20} = 3635 ergibt sich die Wachstumsrate
r = 1.019014581 (speichern!) und daraus das Wachstum zu 1.9 %.
Als Bevölkerungszahl für 1977 erhält man mit der Zinseszinsesformel (1) 4147 Millionen.

b)
Setzt man in (3) für K_n die Werte 5000, 6000 bzw. 7000 ein, so ergeben sich für n die Werte 36.9, 46.6 bzw. 54 8.

Zusammenfassung:

Jahr	Erdbevölkerung in Mio.	
1987	5000	
1997	6000	tatsächlich laut UN erst 1999
2005	7000	tatsächlich laut UN erst im Oktober 2011

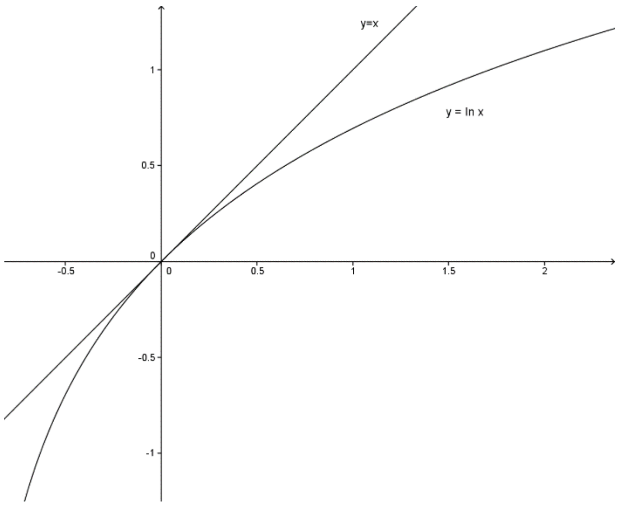
Das Bevölkerungswachstum hat sich offenbar in den Jahren abgeschwächt und ist somit etwas kleiner als 1.9%

Spezialfall: Verdopplungszeit

$$K_n = 2K_0 \qquad n = \frac{\ln 2}{\ln r} \qquad (4)$$

Wir leiten dazu eine (z.B. in der Geografie verwendete) Näherungsformel (eine Faust-regel) her.
Im Kapitel Differentialrechnung wird später gezeigt, dass die Kurve $y = ln(1 + x)$ im Nullpunkt die Steigung 1 hat. Da die Tangente in der Umgebung des Berührungspunkts die Kurve optimal annähert, gilt für x <<1 ungefähr $ln(1 + x) \approx x$.
Damit gilt für die Verdopplungszeit T näherungsweise:

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1+\frac{p}{100})} \approx \frac{\ln 2}{\frac{p}{100}} = \frac{100 \cdot \ln 2}{p} \approx \frac{70}{p}$$



Näherungsformel für die Verdopplungszeit: $T \approx \frac{70}{p}$

Vergleich der Näherungsformel mit der genauen Verdopplungszeit für die Weltbevölkerung auf der Basis der Wachstumsrate zwischen 1950 und 1970 (r = 1.019014581)

mit (4)	Verdopplungszeit T = 36.79…
Faustregel	Verdopplungszeit T' = 36.8