Ein neuer Zugang zur Eulerschen Zahl e:

Aufgabe:
Auf welchen Betrag wächst ein Anfangskapital K_0 bei einem Jahreszinssatz von p%, wenn der Zins jeweils nach $\frac{1}{n}$ Jahr gut geschrieben wird?

In jedem Zeitintervall wird das Kapital mit dem Faktor $\left(1+\frac{p}{100n}\right)$ multipliziert.

$$K_n = \left(1+\frac{p}{100n}\right)^n$$

Wählen wir speziell $K_0 = 1$ und $p = 100\%$ dann gilt $K_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

n	K_n	
1	2	Zinsperiode Jahr
12	2.61	Zinsperiode Monat
360	2.714	Zinsperiode Tag
360·24	2.718130625	Zinsperiode Stunde
360·24·60	2.718261810	Zinsperiode Minute
360·24·60·60	2.718281828...	Zinsperiode Sekunde

Mit kürzeren Verzinsungsperioden wächst zwar das Endvermögen, es strebt aber gegen einen bestimmten Grenzwert. Bei dieser sogenannten stetigen oder kontinuierlichen Verzinsung findet die Verzinsung laufend statt. Aus 1 Fr. werden unter diesen Annahmen bei stetiger Verzinsung e Fr.

Allgemein:
Wird ein Kapital von 1 Fr. zu einem Zinssatz p´ stetig verzinst, so wächst das Kapital bei n Zinsperioden auf $K_n = \left(1+\frac{p'}{100n}\right)^n$. Es kann gezeigt werden, dass sich das Endvermögen dem Grenzwert $e^{\frac{p'}{100}}$ nähert.

Damit stellt sich die Frage, welcher Zusammenhang zwischen dem Zinssatz p bei linearer und dem Zinssatz p´ bei stetiger Verzinsung besteht.
Wenn die beiden Kapitalien am Ende des Jahres überein-stimmen sollen, dann muss gelten:

$1 + e^{\frac{p'}{100}} = 1 + \frac{p}{100}$ oder nach p´ aufgelöst:

$\frac{p'}{100} = \ln\frac{p}{100}$

Zeitpunkt	linear	exp.	Differenz
0	1000	1000.00	0.00
1	1005	1004.87	-0.13
2	1010	1009.76	-0.24
3	1015	1014.67	-0.33
4	1020	1019.61	-0.39
5	1025	1024.58	-0.42
6	1030	1029.56	-0.44
7	1035	1034.57	-0.43
8	1040	1039.61	-0.39
9	1045	1044.67	-0.33
10	1050	1049.76	-0.24
11	1055	1054.87	-0.13
12	1060	1060.00	0.00
Totale Differenz			-3.47

Die Tabelle zeigt die geringen Unterschiede zwischen linearer und stetiger Verzinsung für ein Anfangskapital von 1000 Fr. in Monatsschritten. Einer linearen Verzinsung von 6% entspricht damit einer stetigen Verzinsung von $p' \approx 5.8\%$
Die monatlichen Werte bei stetiger Verzinsung ergeben sich zu

$K(t) = e^{\frac{t}{12}\cdot\ln(1.06)} \approx e^{t\cdot 0.00487..}$

Bei der linearen Verzinsung nimmt das Kapital monatlich um 5 Fr. zu.
Bei der stetigen Verzinsung wächst das Kapital um den Faktor

$e^{\frac{1}{12}\cdot\ln(1.06)} \approx e^{0.00487..} \approx 1.00487$

Die stetige Verzinsung wird vor allem bei Modellen in der Finanzmathematik verwendet.