

9. Exponentieller Zerfall

Von einer radioaktiven Substanz sind zu Beginn $N(0)$ Atome vorhanden. $N(t)$ ist die Anzahl der radioaktiven Atomkerne im Zeitpunkt t . $N(t)$ nimmt exponentiell ab, d.h. es gilt

$$N(t) = N(0) \cdot b^t \quad \text{mit } 0 < b < 1$$

Nach der Halbwertszeit τ ist nur noch die Hälfte der Atomkerne vorhanden. Durch diese Angabe ist b bestimmt.

Beispiel:

Zu Beginn des Experiments waren in einem Präparat $5.12 \cdot 10^{20}$ radioaktive Kerne vorhanden. Nach fünf Stunden waren es noch $1.5625 \cdot 10^{16}$. Gesucht ist die Anzahl der radioaktiven Atomkerne $N(t)$ in Funktion der Zeit t .

Ansatz:

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0) \cdot b^t & \text{wobei } N(0) &= 5.12 \cdot 10^{20} & N(0) &= 1.5625 \cdot 10^{16} \\ N(5) &= N(0) \cdot b^5 & b^5 &= \frac{N(5)}{N(0)} & b &= \left(\frac{N(5)}{N(0)} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Bemerkung:

$b = \frac{1}{8}$ bedeutet, dass in diesem konstruierten Beispiel die Halbwertszeit $\tau = 20$ Minuten beträgt.

Häufig wird b in der Form $b = e^{-\alpha}$. $\alpha = -\ln b$ ist die sogenannte Zerfallsrate. Da $e^{-\alpha} \approx 1 - \alpha$ bedeutet das Ergebnis, dass in der Zeiteinheit gerade α zerfallen.

Die Zerfallsfunktion kann damit in der folgenden Form dargestellt werden:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\alpha t}$$

Daraus berechnet sich leicht die Halbwertszeit τ :

$$N(\tau) = N(0) \cdot e^{-\alpha \tau} = \frac{1}{2} \cdot N(0) \quad \text{oder } e^{-\alpha \tau} = \frac{1}{2} \quad \text{logarithmiert zur Basis } e$$

$$-\alpha \tau = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

Für die Halbwertszeit τ gilt damit

$$\tau = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

Aufgabe:

Wie gross ist für $^{239}\text{Uran}$ mit einer Halbwertszeit von $\tau = 23.45$ Minuten der Prozentsatz der nach einer Stunde noch vorhandenen Atome?

$$\text{Wegen } \tau = \frac{\ln 2}{\alpha} \text{ gilt } \alpha = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{23.45} \approx 0.029559..$$

Die Zerfallsrate $\alpha \approx 0.029559$ bedeutet, dass die Zahl der Atome in einer Minute ungefähr um 3% pro Minute abnimmt.

$$\text{Wegen } N(60) = N(0) \cdot e^{-\alpha \cdot 60} \approx N(0) \cdot e^{-\alpha \cdot 60} = N(0) \cdot 0.1697 \dots$$

Nach einer Stunde sind somit ungefähr noch 17% der ursprünglichen Atome vorhanden.

Die Radiokarbon-Methode

In der Atmosphäre, in Tieren und Pflanzen ist seit Jahrtausenden das Verhältnis zwischen dem stabilen ^{12}C und dem radioaktiven ^{14}C (Halbwertszeit 5736 Jahre) nahezu konstant. ^{14}C zerfällt zwar laufend, gleichzeitig entsteht durch kosmische Strahlung dauernd neues ^{14}C . Stirbt ein Organismus aber ab, so wird kein ^{14}C mehr aufgenommen, während das vorhandene weiterhin zerfällt. Dadurch ändert sich das Verhältnis der beiden Kohlenstoffarten in dem untersuchten Organismus. Diese Eigenschaft kann zur Altersbestimmung benutzt werden.

Aufgabe:

Im Jahre 1960 stellte man in der Leinwand einer altägyptischen Königsmumie einen ^{14}C - Anteil von 58.3% fest. Welches Alter hat die Leinwand ungefähr?

Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\alpha t} \text{ mit } \alpha = \frac{\ln 2}{\tau} \approx 0.000121$$

Das Alter ergibt sich wegen $N(t) = 0.583 \cdot N(0)$ aus $e^{-\alpha t} = 0.583$ durch Logarithmieren zu

$$-\alpha t = \ln 0.583 \text{ bzw. } t = -\frac{\ln 0.583}{\alpha} = 4465$$

Die Leinwand stammt also ungefähr aus der Zeit 2500 v. Chr.

Übungsaufgaben:

1.

Bei der Untersuchung des Turiner Grabtuchs (dieses wird von vielen Gläubigen als Grabtuch Jesu angesehen) stellte man eine Aktivität von 13.84 Zerfällen pro Gramm Kohlenstoff und Minute fest. Wie alt ist das Tuch vermutlich, wenn noch lebendes organisches Material eine Aktivität von 15.3 Zerfällen pro Gramm und Minute aufweist?



2.

Im Jahr 1991 wurde in den Ötztaler Alpen die Gletschermumie „Ötzi“ gefunden. Untersuchungen ergaben, dass die Mumie noch 64% des Kohlenstoffs ^{14}C enthält, der in lebenden Gewebe vorhanden ist. Vor wie vielen Jahren starb „Ötzi“?

3.

Im Jahre 1980 gab es weltweit etwa 60'000 Poliofälle. Durch ein Impfprojekt der WHO wurde diese Krankheit bekämpft so dass es 1993 nur noch rund 10'000 Fälle gab. Es wird im Folgenden von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen.

a) Wie gross ist die jährliche prozentuale Abnahme?

b) Wie viele Fälle waren 2007 zu erwarten?

c) Wann sollte die Zahl der Fälle kleiner als 1, d.h. die Krankheit „ausgerottet“ sein?

Lösung:

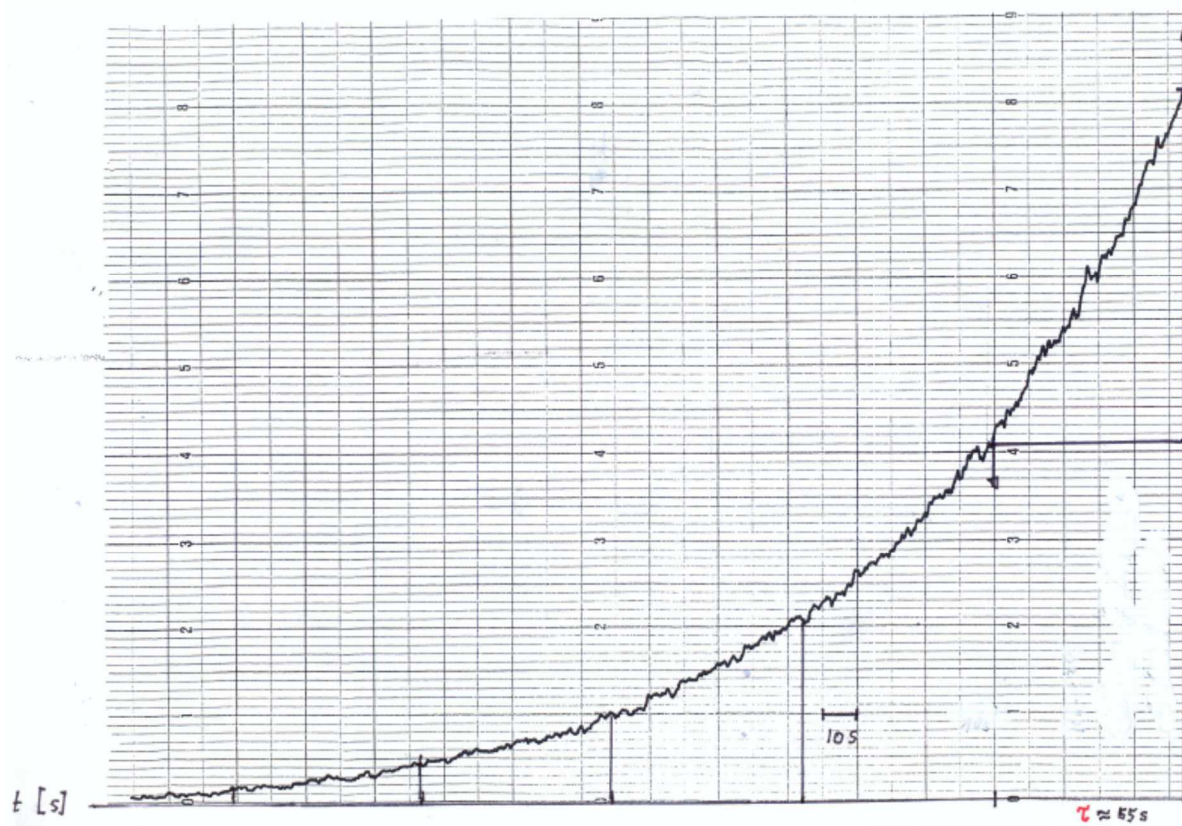
a) ca. 13% b) ca. 1450 c) ungefähr 2065

4.

Ein Co-60 Strahlerstift mit der Halbwertszeit 5.272 wies bei seiner Herstellung am 13.5.1993 die Aktivität 74.0 kBq auf. In welchem Kalenderjahr beträgt seine Aktivität weniger als 2% der Anfangsaktivität?

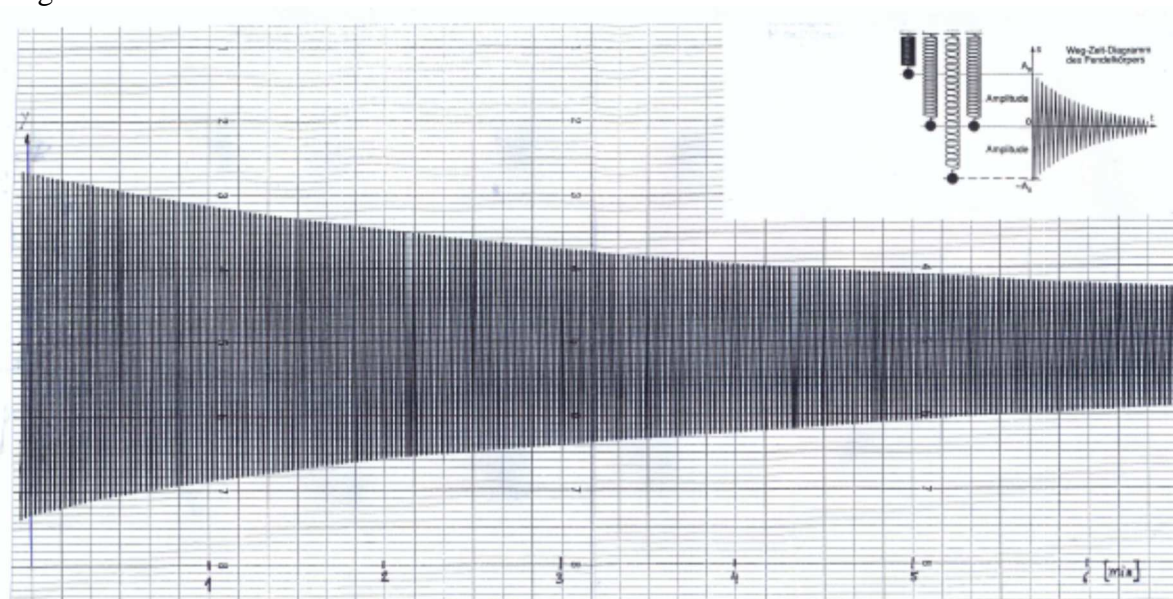
Lösung: $t = 29.75$ a, Kalenderjahr 2023

In der Abbildung ist ein Versuch zum radioaktiven Zerfall von Radon-220 aufgezeichnet (cb 28.5.1997). Für die Halbwertszeit ergibt sich ein Wert $\tau \approx 55$ s (Tabellenwert 55.6 s)



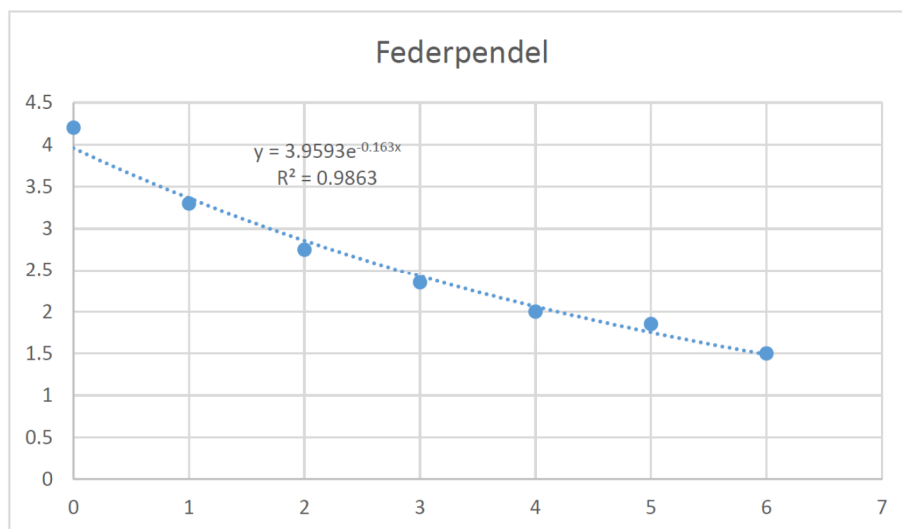
Es folgen weitere Beispiele von exponentiellem Zerfall

Bei einem Versuch im Physikpraktikum wurde der Verlauf der Amplitude eines Federpendels aufgezeichnet.



Zu den angegebenen Zeiten wurden die folgenden Amplituden herausgelesen.

t [min]	y [cm]
0	4.20
1	3.30
2	2.75
3	2.35
4	2.00
5	1.85
6	1.50



Die Excel-Grafik zeigt, dass die gemessenen Amplituden ungefähr auf der Exponentialkurve mit der Gleichung $y = 3.96 \cdot e^{-0.163t} \approx 3.96 \cdot 0.85^t$ liegen.

Übungsaufgabe:

Das exponentielle Modell ist eine gute Näherung für die Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe über Meer. Der Druck beträgt auf Meereshöhe 1015 mbar (Millibar). Pro 10m Höhenzunahme nehme der Druck um 0.13% ab.

- a) Wie hoch ist der Luftdruck auf dem Mount Everest (8880 m)?
- b) In einer gewissen Höhe sei der Luftdruck 1000 mbar, in einer andern Höhe 160 mbar. Wie gross ist der Luftdruck in der Mitte der beiden Niveaus?

Lösung:

- a) 320 mbar b) 400 mbar (geometrisches Mittel)

Weitere Beispiele für exponentiellen Zerfall:

- Exponentielle Abnahme der Geschwindigkeit eines Körpers infolge Reibung.
- Exponentielle Abnahme der Spannung beim Entladen eines Kondensators.
- Dringt Licht in Wasser ein, so nimmt die Intensität exponentiell mit der Eindringtiefe ab.