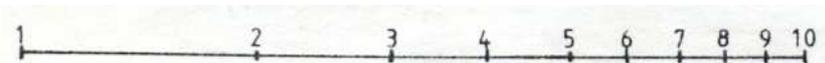


12. Verwendung von Logarithmuspapier

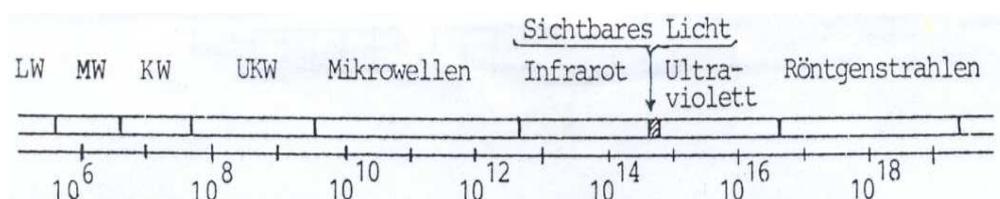
Eine Zahlengerade, bei der man vom Punkt 1 aus die Länge $\log_{10} x = \lg x$ abträgt und den Endpunkt mit x beschriftet, bezeichnet man als logarithmische Skala.

Beispiel einer logarithmischen Skala: Einheit 10 cm

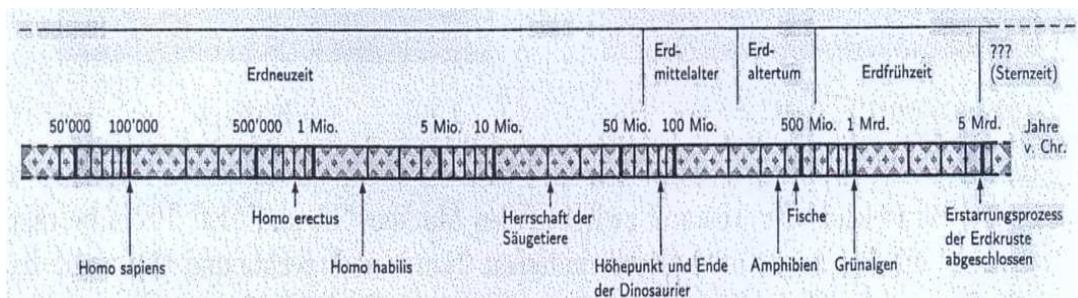


Logarithmische Skalen sind dann praktisch, wenn die darzustellende Variable einen grossen Bereich umfasst, wie etwa in den folgenden Beispielen. Da $\lg 0$ nicht definiert ist, kann der Wert 0 nicht dargestellt werden.

Darstellung des elektromagnetischen Spektrums (Frequenz in Hertz)

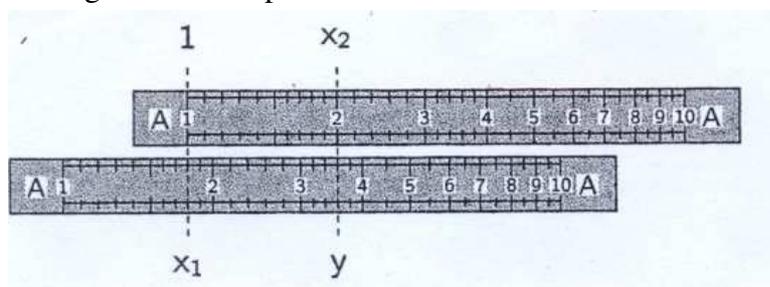


Geschichte der Erde



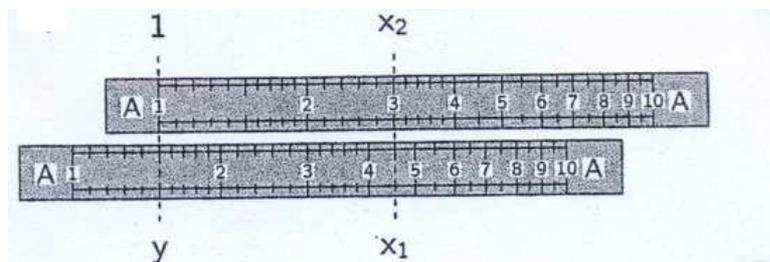
Mit zwei logarithmischen Skalen kann man einen „Rechenschieber“ bauen. Dieser war vor der Erfindung des Taschenrechners ein unentbehrliches Rechenhilfsmittel.

Es folgen zwei Beispiele:



einer Multiplikation

$$1.8 \cdot 2 = 3.6$$



bzw. einer Division:

$$4.5 \div 3 = 1.5$$

Eine weitere Bedeutung logarithmischer Skalen liegt darin, dass bei geeigneter Skalierung die Graphen der folgenden Funktionen als Geraden erscheinen.

Funktionsgleichung	umgeformte Gleichung	x-Skala	y-Skala
$y = a \cdot b^x$	$\lg y = \lg a + x \cdot \lg b$	linear	logarithmisch
$y = a \cdot x^n$	$\lg y = \lg a + n \cdot \lg x$	logarithmisch	logarithmisch
$y = a \cdot \lg(bx)$	$y = a \cdot \lg b + a \cdot \lg x$	logarithmisch	linear

Wählt man also z.B. für die x-Achse eine lineare, für die y-Achse eine logarithmische Einteilung, so ist das Bild einer Exponentialfunktion eine Gerade mit der Steigung $\lg b$ und dem y-Achsenabschnitt $\lg a$.

Aufgabe:

Die folgenden Exponentialfunktionen sind auf Logarithmuspapier graphisch darzustellen (siehe nächste Seite):

$$y = 2^x, 1.5^x, 4^x, 3 \cdot 2^x, 2^{x-2}, 100 \cdot 2^{-x}$$

Die Beispiele $y = 2^x, 3 \cdot 2^x, 2^{x-2} = \frac{1}{4} \cdot 2^x$ unterscheiden sich um einen konstanten Faktor. Die zugehörigen Geraden gehen deshalb durch eine Translation in y-Richtung auseinander hervor.

Aufgabe :

Zeichnen Sie umgekehrt die Geraden a) - d) auf das Logarithmuspapier und bestimmen Sie graphisch die Gleichungen der zugehörigen Exponentialfunktionen (siehe nächste Seite)

Der Wert des Parameters a kann direkt beim y-Achsenabschnitt abgelesen werden.

Der Wert des Wachstumsfaktors kann auf verschiedene Arten bestimmt werden:

1. indem man aus der Skizze herausliest, mit welchem Faktor der Funktionswert multipliziert wird, wenn x um 1 wächst
2. indem man aus der Skizze herausliest, mit welchem Faktor r der Funktionswert multipliziert wird, wenn x um Δx wächst. Aus der Gleichung $b^{\Delta x} = r$ kann b dann bestimmt werden.
3. indem man die Koordinaten zweier geeigneter Punkte $P_1(x_1, \lg y_1)$ bzw. $P_2(x_2, \lg y_2)$

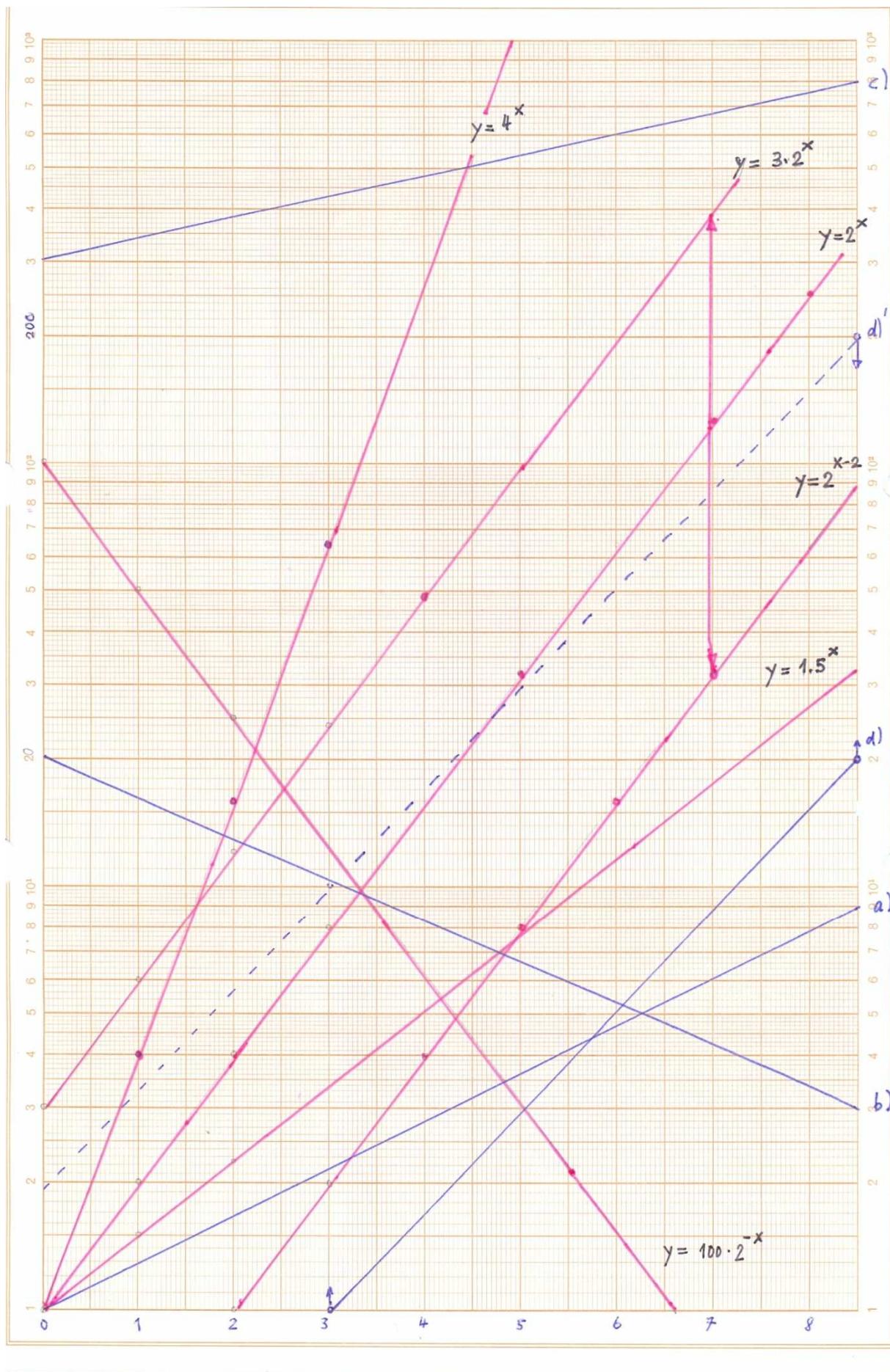
$$\text{bestimmt und daraus die Steigung berechnet: } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lg\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\Delta x}$$

Wegen $m = \lg b$ ergibt sich damit b.

Lösungen:

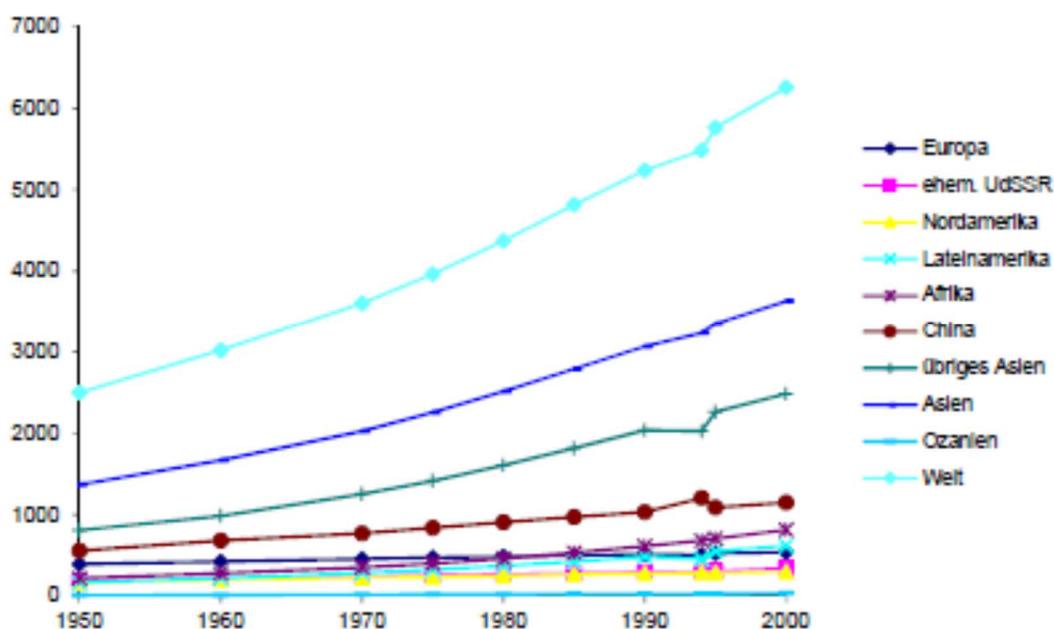
$$a) y \approx 1.3^x \quad b) y \approx 20 \cdot 0.8^x \quad c) y \approx 300 \cdot 1.12^x \quad d') y \approx 1.9 \cdot 1.7^x \quad d) y \approx 0.19 \cdot 1.7^x$$

Die Lösung der Aufgabe d) geht aus der von d') durch eine Translation hervor.

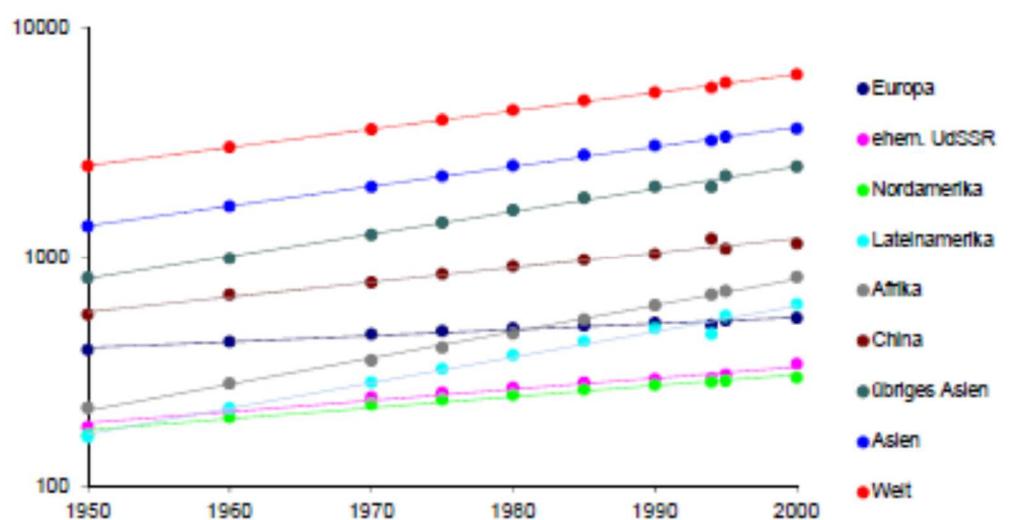


Beispiel: Vergleich des Bevölkerungswachstums in den verschiedenen Kontinenten

Weltbevölkerung										
	UN77	UN94	UN77	PRG	PRG	PRG	PRG	UN94	PRG	PRG
	1950	1960	1970	1975	1980	1985	1990	1994	1995	2000
Europa	392	425	459	473	487	500	514	504	527	540
ehem. UdSSR	180	214	243	255	268	282	292	293	305	340
Nordamerika	168	199	228	237	249	262	275	283	288	298
Lateinamerika	164	218	283	324	372	426	486	458	551	620
Afrika	219	279	352	401	461	532	614	682	708	814
China	558	682	772	839	908	973	1031	1205	1090	1148
übriges Asien	810	986	1254	1417	1607	1817	2038	2028	2268	2487
Asien	1368	1668	2028	2256	2515	2790	3069	3233	3358	3635
Ozänien	13	16	19	21	23	26	28	28	30	33
Welt	2501	3020	3610	3969	4374	4817	5240	5479	5763	6254



Mit einer logarithmischen Skala



Ein Beispiel aus der Finanzmathematik

Aktien und Obligationen Schweiz 1926 - 1995

