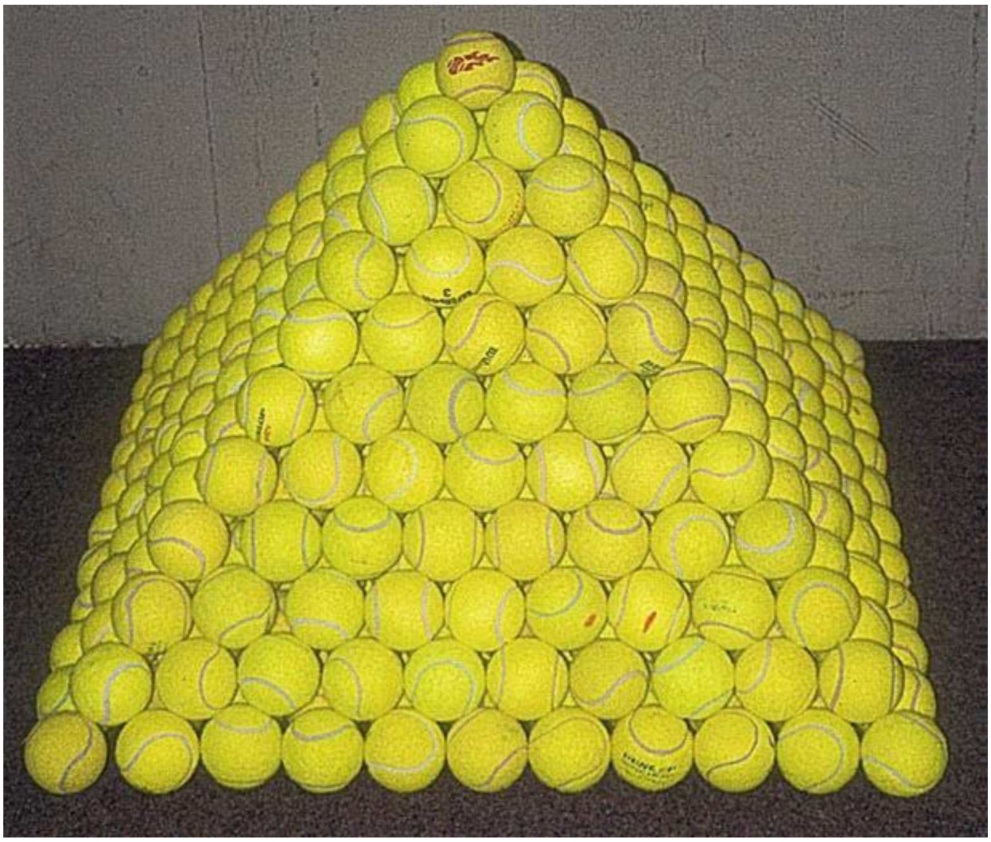
6. Arithmetische Folgen höherer Ordnung

AF 1. Ordnung	1		4		7		10		13
Differenzenfolge		3		3		3		3	

AF 2. Ordnung	1		4		9		16		25		36		49		64
1. Differenzenfolge		3		5		7		9		11		13		15	
2. Differenzenfolge			2		2		2		2		2		2		

Beispiel:
In der abgebildeten unvollständigen Pyramide aus Tennisbällen mit quadratischen Schichten hat es insgesamt $11^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 506$ Bälle.



Bei einer AF 2. Ordnung ist das n-te Glied a_n eine quadratische Funktion von n, die Summe der n ersten Glieder ist eine kubische Funktion von n.

Es gilt:

$$s = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n^3 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Ein Beweis ergibt sich später im Abschnitt →Vollständige Induktion

Mit der Annahme, dass die Summenformel eine kubische Funktion von n ist, können die Koeffizienten mit dem Ansatz
$s_n = an^3 + bn^2 + cn$
aus den Bedingungen $s_1 = 1$, $s_2 = 5$ und $s_3 = 14$ bestimmt werden.

Das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{llll} a & +b & +c & = 1 \\ 8a & +4b & +2c & = 5 \\ 27a & +9b & +3c & = 14 \end{array} \right|$$

hat die Lösungen $a = \frac{1}{3}$ $b = \frac{1}{2}$ $c = \frac{1}{6}$

Eine Herleitung ist auch auf dem folgenden Weg möglich:

Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt:

$$(1+a)^3 = 1 + 3 \cdot a + 3 \cdot a^2 + a^3$$

$$\begin{array}{llll} a = 1 & 2^3 & = 1 + 3 \cdot 1 & + 3 \cdot 1^2 + 1^3 \\ a = 2 & 3^3 & = 1 + 3 \cdot 2 & + 3 \cdot 2^2 + 2^3 \\ a = 3 & 4^3 & = 1 + 3 \cdot 3 & + 3 \cdot 3^2 + 3^3 \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ a = n & (1+n)^3 & = 1 + 3 \cdot n & + 3 \cdot n^2 + n^3 \end{array}$$

Beide Seiten werden spaltenweise summiert. Die dritten Potenzen heben sich auf mit Ausnahme von $(1+n)^3$ auf der linken und 1^3 auf der rechten Seite.

$$(1+n)^3 = n + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + 3 \cdot s + \quad 1$$

Löst man diese Gleichung nach s auf, so ergibt sich
$s = \frac{1}{6} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{3} \cdot n^3 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

Mit derselben Idee können die Summenformeln für 3. Potenzen (Polynom 4. Grades), bzw. 4. Potenzen,…, k-te Potenzen hergeleitet werden.