4. Das Summenzeichen

Addiert man die n ersten Glieder einer Folge, so entsteht die zu ihr gehörige Reihe (Teilsummenfolge, Partialsummenfolge).

Einführendes Beispiel: $a_n = n^2$ Folge der Quadratzahlen
zugehörige Reihe $s_1 = 1$ $s_2 = s_1 + a_2 = 5$ $s_3 = 14$ $s_4 = 30$

rekursive Definition:
$s_1 = a_1$ $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$

Das Summenzeichen ermöglicht eine abkürzende Schreibweise für Summen. Abkürzend schreiben wir im einführenden Beispiel:

$$s_{10} = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots . +100 = \sum_{k=1}^{10} k^2$$

Allgemein:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ...+ a_n$$ Summe der n ersten Glieder der Folge.

Es ist $k = 1, 2, 3, ...\ n$ zu setzen und die zugehörigen Summanden zu addieren.

Bemerkung:
Statt der Indexvariablen k (Summationsindex genannt) verwendet man häufig auch i, j, l, μ oder ν.

Beispiele:
a)

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} = \sum_{j=1}^{5} \frac{1}{j}$$

b)

$$1^3 = 1^2 = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^2 = (1 + 2 + 3)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right)^2$$

Vermutung:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(n \cdot (n+1)\right)^2$$ Beweis mit →vollständiger Induktion

c)

$$\sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right) = 1 - \frac{1}{101}$$

„Elefantenspaziergang im Zolli“: Der Rüssel des ersten und der Schwanz des letzten Elefanten bleiben frei“.

d)

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+......+\frac{1}{100}=\sum_{i=2}^{100}(-1)^i\cdot\frac{1}{i}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-......-\frac{1}{100}=\sum_{i=2}^{100}(-1)^{i+1}\cdot\frac{1}{i}$$

Regeln für das Summenzeichen:

(1) $\sum_{k=1}^{n} c\cdot a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

Beispiele:

a)

$\sum_{i=1}^{6} i\cdot(i+1) - \sum_{i=1}^{6} i\cdot(i-1) = \sum_{i=1}^{6} i^2 + i -\cdot (i^2 - i) = 2\sum_{i=1}^{6} i = 2\cdot\frac{6}{2}\cdot(6+1) = 42$

b)

$\sum_{j=0}^{4} 3\cdot 2^j = 3\cdot\sum_{j=0}^{4} 2^j = 3\cdot\frac{2^5-1}{2-1} = 93$

c)

Ein Spiel mit Jasskarten:

Eine Mitspielerin wird aufgefordert, unbeobachtet Karten folgendermassen aufzubeigen:

Ist z.B. die erste Karte eine 6, dann werden bis 11 weitere Karten auf die Beige gezählt, also 5 Karten dazugelegt. Ist die nächste Karte z.B. eine Dame (Wert 3), dann werden noch 8 Karten beigefügt, … am Schluss bleiben allenfalls einige Karten übrig.

Die Summe s der untersten Kartenwerte u_i kann dann aus der Anzahl der Kartenbeigen n und der Anzahl der übrig gebliebenen Karten r folgendermassen bestimmt werden:

$$s=\sum_{i=1}^{n}u_i = 12\cdot(n-3)+r$$

Beweis:

Werte der untersten Karte:	u_1	u_2	u_3	…	u_n
Anzahl der Karten im Stapel:	$12-u_1$	$12-u_2$	$12-u_3$	…	$12-u_n$

Gesamtzahl der Karten:

$$36 = r+\sum_{i=1}^{n}(12-u_i) = r+12n-\sum_{i=1}^{n}u_i = r+12n-s$$

$$s = r+12n-36 = 12\cdot(n-3)+r$$

In den nächsten Abschnitten untersuchen wir zwei wichtige spezielle Folgentypen, die sogenannten arithmetischen (AF) bzw. geometrischen Folgen (GF).