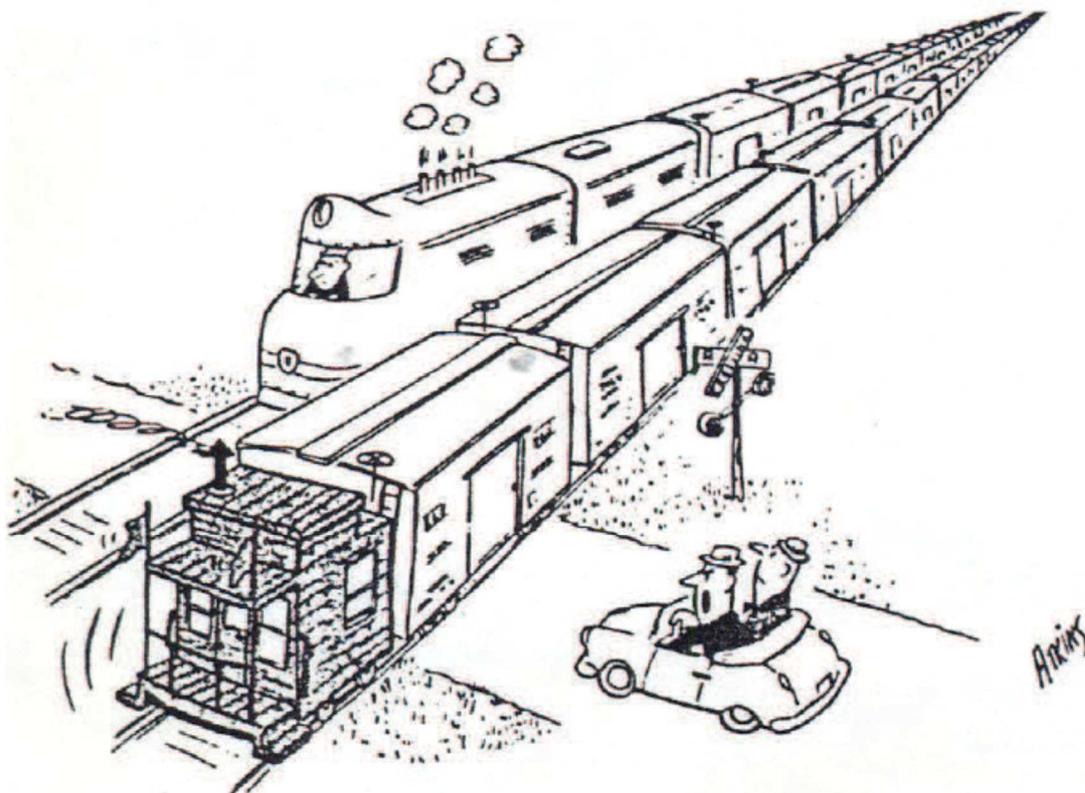


Folgen und Reihen



„Well, finally! I thought this thing would never end.“

Die meisten Probleme der angewandten Mathematik sind nicht mit einer expliziten Formel lösbar. Hingegen ist es oft möglich, die Lösung schrittweise anzunähern. Dies führt auf den Folgenbegriff. Als Spezialfälle seien erwähnt die sogenannten arithmetischen Folgen, bei denen die Glieder linear wachsen sowie die geometrischen Folgen, bei denen die Beträge der Glieder exponentiell wachsen.

1. Einführende Beispiele

Bei Intelligenztests wird man etwa aufgefordert, die Gesetzmässigkeit der angegebenen Zahlen sinnvoll zu ergänzen:

Beispiele:

a) 1, 3, 5, 7, 9, ...

b) 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...

c) 2, 4, 8, 16, 32, ...

d) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

e) 1, 2, 6, 24, 120, 720, ...

f) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

g) 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

h) $\frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \dots$

i) -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, ...

j) 8, -4, 2, -1, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$

k) $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots, \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4, \dots$

l) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

m) 1, 3, 7, 15, ...

n) 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

(Schülvorschlag: 1, „einmal 1“, „zweimal 1“, „einmal 2 und einmal 1“, „einmal 1 und einmal 2 und zweimal 1“,...)

In den Beispielen folgen sich die Zahlen nach bestimmten Gesetzen. Wir sprechen von Zahlenfolgen. Die n-te Zahl heisst n-tes Glied der Zahlenfolge und wird mit a_n bezeichnet.

Definition:

Wird jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zugeordnet, so spricht man von einer reellen Zahlenfolge und schreibt dafür (a_n) . Eine Folge ist also eine Funktion mit dem Definitionsbereich \mathbf{N} .

Fragen:

Gibt es eine explizite Formel für das n-te Glied?

Gibt es eine Formel, mit der man ein Glied aus den vorhergehenden Gliedern berechnen kann?

Hat die Folge einen Grenzwert, d.h. streben die Glieder einer bestimmten Zahl zu, wenn n über alle Grenzen wächst?

Gibt es eine Formel für die Summe der n ersten Glieder?