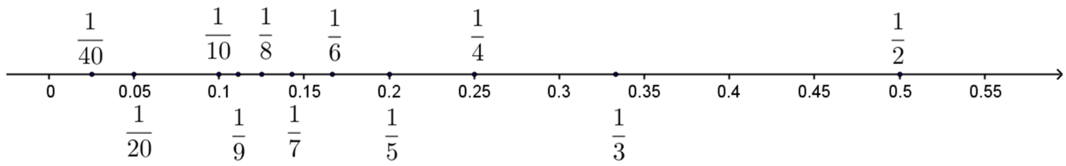
# 10. Konvergenz von Folgen und Reihen

Der in den Abschnitten geometrische Folgen und Reihen eingeführte Grenzwertbegriff ist für die Analysis (Infinitesimalrechnung) grundlegend. Im Folgenden werden Grenzwerte bei beliebigen Folgen und Funktionen untersucht.

Beispiele:
a) $a_n = \frac{1}{n}$




Fast alle Glieder der Folge liegen in einer Umgebung von 0, wobei „Fast alle“ bedeuten soll „alle bis auf endlich viele“.
Wir sagen in diesem Fall, die Folge hat den Grenzwert 0 und schreiben dafür $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Folgen mit dem Grenzwert 0 heissen Nullfolgen.

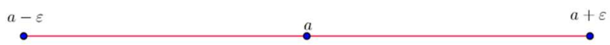
b): $a_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$
In jeder noch so kleinen Umgebung von 2 liegen fast alle Folgenglieder. Die Folge hat den Grenzwert 2 und wir schreiben dafür: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Hat eine Folge einen Grenzwert, so heisst sie konvergent, andernfalls divergent.

c)
Beispiel einer divergenten Folge: $a_n = n^2$

> Definition 1:
> Eine Zahl a heisst Grenzwert der Folge $(a_n)$, wenn in einer beliebig gewählten Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen und wir schreiben dafür: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Um zu zeigen, dass eine Folge konvergiert, ist also für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ zu zeigen,




dass fast alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a liegen.

Wählt man etwa im
Beispiel a) $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dann liegen alle Folgenglieder $a_n$ mit Nummer $n > 10$ in der ε-Umgebung von 0.

In Beispiel b) ist zu zeigen, dass $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{3}{n+1}\right| < \varepsilon$ für ein geeignetes $n_0$ ist.

$\frac{3}{n+1} < \varepsilon$ ist erfüllt für $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Wählt man z.B. $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dann ergibt sich $n_0 = 29$.

> Definition 2 (Formulierungsvariante)
> Eine Zahlenfolge heisst konvergent mit dem Grenzwert a, wenn es zu jedem ε > 0 ein $n_0$ gibt, so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ sobald $n > n_0$.

Bemerkung:
Mit andern Worten $a_n$ liegt in der ε-Umgebung von a für $n > n_0$.

## Grenzwert von Folgen

| n = | $a_n = \frac{3n^2-1}{4n^2+2}$ | $a_n = \frac{1}{n}$ | $a_n = \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ | $a_n = \frac{1}{n^2}$ | $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$ | $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.33333333 | 1.00000000 | 1.00000000 | 1.00000000 | 0.84147098 | 2.00000000 |
| 2 | 0.61111111 | 0.50000000 | 0.99309250 | 0.25000000 | 0.45464871 | 2.25000000 |
| 3 | 0.68421053 | 0.33333333 | 0.98907400 | 0.11111111 | 0.04704000 | 2.37037037 |
| 4 | 0.71212121 | 0.25000000 | 0.98623270 | 0.06250000 | -0.18920062 | 2.44140625 |
| 5 | 0.72549020 | 0.20000000 | 0.98403444 | 0.04000000 | -0.19178485 | 2.48832000 |
| 6 | 0.73287671 | 0.16666667 | 0.98224197 | 0.02777778 | -0.04656925 | 2.52162637 |
| 7 | 0.73737374 | 0.14285714 | 0.98072900 | 0.02040816 | 0.09385523 | 2.54649970 |
| 8 | 0.74031008 | 0.12500000 | 0.97942030 | 0.01562500 | 0.12366978 | 2.56578451 |
| 9 | 0.74233129 | 0.11111111 | 0.97826739 | 0.01234568 | 0.04579094 | 2.58117479 |
| 10 | 0.74378109 | 0.10000000 | 0.97723722 | 0.01000000 | -0.05440211 | 2.59374246 |
| 11 | 0.74485597 | 0.09090909 | 0.97630626 | 0.00826446 | -0.09090820 | 2.60419901 |
| 12 | 0.74567474 | 0.08333333 | 0.97545713 | 0.00694444 | -0.04471441 | 2.61303529 |
| 13 | 0.74631268 | 0.07692308 | 0.97467666 | 0.00591716 | 0.03232054 | 2.62060089 |
| 14 | 0.74681934 | 0.07142857 | 0.97395461 | 0.00510204 | 0.07075767 | 2.62715156 |
| 15 | 0.74722838 | 0.06666667 | 0.97328289 | 0.00444444 | 0.04335252 | 2.63287872 |
| 16 | 0.74756335 | 0.06250000 | 0.97265495 | 0.00390625 | -0.01799396 | 2.63792850 |
| 17 | 0.74784111 | 0.05882353 | 0.97206546 | 0.00346021 | -0.05655279 | 2.64241438 |
| 18 | 0.74807396 | 0.05555556 | 0.97151000 | 0.00308642 | -0.04172151 | 2.64642582 |
| 19 | 0.74827109 | 0.05263158 | 0.97098487 | 0.00277008 | 0.00788827 | 2.65003433 |
| 20 | 0.74843945 | 0.05000000 | 0.97048695 | 0.00250000 | 0.04564726 | 2.65329771 |
| | | | | | | |
| 100 | 0.74993750 | 0.01000000 | 0.95499259 | 0.00010000 | -0.00506366 | 2.70481383 |
| 101 | 0.74993873 | 0.00990099 | 0.95489757 | 0.00009803 | 0.00447550 | 2.70494598 |
| 102 | 0.74993993 | 0.00980392 | 0.95480349 | 0.00009612 | 0.00975320 | 2.70507556 |
| 103 | 0.74994109 | 0.00970874 | 0.95471034 | 0.00009426 | 0.00604843 | 2.70520264 |
| 104 | 0.74994222 | 0.00961538 | 0.95461810 | 0.00009246 | -0.00309252 | 2.70532731 |
| | | | | | | |
| 1000 | 0.74999938 | 0.00100000 | 0.93325430 | 0.00000100 | 0.00082688 | 2.71692393 |
| 1001 | 0.74999938 | 0.00099900 | 0.93324497 | 0.00000100 | 0.00091907 | 2.71692529 |
| 1002 | 0.74999938 | 0.00099800 | 0.93323565 | 0.00000100 | 0.00016693 | 2.71692664 |
| 1003 | 0.74999938 | 0.00099701 | 0.93322635 | 0.00000099 | -0.00073703 | 2.71692799 |
| 1004 | 0.74999938 | 0.00099602 | 0.93321705 | 0.00000099 | -0.00096225 | 2.71692934 |
| | | | | | | |
| 10000 | 0.74999999 | 0.00010000 | 0.91201084 | 0.00000001 | -0.00003056 | 2.71814593 |
| 10001 | 0.74999999 | 0.00009999 | 0.91200993 | 0.00000001 | -0.00009662 | 2.71814594 |
| 10002 | 0.74999999 | 0.00009998 | 0.91200902 | 0.00000001 | -0.00007385 | 2.71814595 |
| 10003 | 0.74999999 | 0.00009997 | 0.91200810 | 0.00000001 | 0.00001681 | 2.71814597 |
| 10004 | 0.74999999 | 0.00009996 | 0.91200719 | 0.00000001 | 0.00009200 | 2.71814598 |
| | | | | | | |
| 100000 | 0.75000000 | 0.00001000 | 0.89125094 | 0.00000000 | 0.00000036 | 2.71826824 |
| 100001 | 0.75000000 | 0.00001000 | 0.89125085 | 0.00000000 | -0.00000822 | 2.71826824 |
| 100002 | 0.75000000 | 0.00001000 | 0.89125076 | 0.00000000 | -0.00000924 | 2.71826824 |
| 100003 | 0.75000000 | 0.00001000 | 0.89125067 | 0.00000000 | -0.00000176 | 2.71826824 |
| 100004 | 0.75000000 | 0.00001000 | 0.89125058 | 0.00000000 | 0.00000733 | 2.71826824 |
| | | | | | | |
| 1000000 | 0.75000000 | 0.00000100 | 0.87096359 | 0.00000000 | -0.00000035 | 2.71828047 |
| 1000001 | 0.75000000 | 0.00000100 | 0.87096358 | 0.00000000 | 0.00000060 | 2.71828047 |
| 1000002 | 0.75000000 | 0.00000100 | 0.87096357 | 0.00000000 | 0.00000100 | 2.71828047 |
| 1000003 | 0.75000000 | 0.00000100 | 0.87096356 | 0.00000000 | 0.00000048 | 2.71828047 |
| 1000004 | 0.75000000 | 0.00000100 | 0.87096356 | 0.00000000 | -0.00000048 | 2.71828047 |
| | | | | | | |
| limes | 0.75 | 0 | 0 | 0 | 0 | e |

ac

Zahlenfolgen

Will man Analysis betreiben
muss man gelegentlich was schreiben;
wir schreiben daher zu Beginn
Uns ein paar schlichte Zahlen hin:

$$1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{1}{3}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{5}\,,\ldots. \qquad (1)$$

Wie rechts es immer weiter geht,
sich sicherlich von selbst versteht:
Ein Sechstel steht an sechster Stell.
An siebter dann ein Siebentel,
und was nun niemand mehr verwundert:
ein Hundertstel steht auf Platz hundert.
Kurzum an n-ter Position,
das wissen wir jetzt alle schon,
muss stets die Zahl ein n-tel steh´n,

$$\frac{1}{n}$$

Wie schön, wie schön, wie schön!

Das was soeben hier beschrieben,
wo ihr gefolgt seid mir, ihr Lieben,
wird eine Folge kurz genannt
von Bayern bis zur Waterkant.

Auch bei den nächsten Folgen hier
reicht wieder rechts nicht das Papier:

$$\frac{1}{2}\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{8}\,,\frac{1}{16}\,,\ldots. \qquad (2)$$

$$2, 4, 6, 8, \ldots. \qquad (3)$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots. \qquad (4)$$

$$1, \frac{2}{3}\,, 1, \frac{4}{5}\,, 1\ \frac{6}{7}\,, 1\,, \ldots. \qquad (5)$$

(Man füg´ an jeder wenn man kann,
zum Spass sechs weit´re Zahlen an!)

Ganz allgemein schreibt Folgen man
in folgender Gestalt gern an:

$$a_1, a_2, a_3,\ \ldots\ldots, a_n, \ldots.$$

wie auch auf etwas kürz´re Art

$$(a_n),$$

wobei man gleich Papier einspart.

Die Folgen (1) bis (4) erhalten
auf diese Weise die Gestalten

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2^n}\right), (2n), ((-1)^n)$$

dieweil die fünfte Folge man
z.B. so beschreiben kann

$$a_n = \begin{cases} 1 & , falls\ n\ ungerade \\ \frac{n}{n+1} & , falls\ n\ gerade \end{cases}$$

Wie ich mir eine Folge mal´
ist letzten Endes ganz egal,
sofern man nur dabei begreift,
wie diese läuft und läuft und läuft,

$$a_1, a_2, a_3,\ \ldots\ldots, a_n, \ldots.$$

d.h. wie jedem n dabei
ein $a_n$ zugeordnet sei.
Das n durchläuft vergnügt und heiter
dabei die ganze Zahlenleiter

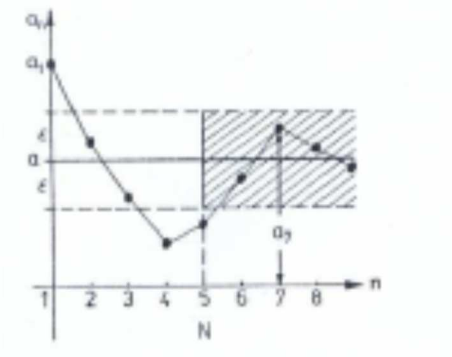
$$1\,, 2, 3, 4, 5, \ldots\, usw.$$

Nun sind wir schon ein Stück gescheiter.

Die Zahlenfolgen laufen, laufen
fast wie beim Sommerschlussverkaufen.
Was hat das nur für einen Sinn?
Wo laufen denn die Folgen hin?

Gar manche machen wilde Sprünge
und and´re ausgeflippte Dinge.
Doch einige, in stiller Ruh
sie “streben einem Grenzwert zu“.

Sie konvergieren sagt man auch
(das ist schon lange Zeit so Brauch).
Was aber heisst „sie konvergieren“?
Das will ich kurz euch definieren:




*Man sagt, es konvergiert* $(a_n)$
*zum Grenzwert, welchen a ich nenn´,*
*wenn, wie skizziert im ob´gen Bild,*
*die folgende Bedingung gilt:*

*„Zu jeder positiven Zahl*
*- ich nenn sie* $\varepsilon$ *einmal -*
*gibt es ein positives N,*
*für das ich folgendes erkenn´:*
$\forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon$“

In Formelzeichen, wie durchtrieben,
wird dies erstaunlich kurz beschrieben:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$
Auch wird dies so symbolisiert:
$a_n \to a$ für $n \to \infty$
wie auch in Kurzform aufnotiert:
$a_n \to a$.

So einfach alles dies gesagt;
So schwer sich damit mancher plagt.
Drum lieber Leser, sei recht pfiffig,
und mach´ dir´s an Exempeln griffig.

Zum Beispiel Folgen (1) und (2),
sie streben munter, eins, zwei, drei,
zum Grenzwert 0, das sieht man schon.
Prüf´s nach mit N und $\varepsilon$.

Bei (3), (4) ist man angeschmiert,
weil überhaupt nichts konvergiert.
Guckt man sich auch die Augen aus,
kein Grenzwert springt dabei heraus.
Man möchte fast den Mut verlieren,
denn diese Folgen „divergieren“.

Die Folge (5) dagegen strebt,
was uns´re Stimmung merklich hebt
zum Grenzwert 1, ihr sei´s gedankt,
obwohl sie dabei etwas schwankt.

Der Leser such´sich weit´re Fälle
jongliere sie wir Zirkusbälle,
hol N und ε herbei,
vermische dies zu einem Brei,
der klumpenfrei ist, schlank und glatt,
bis alles er verstanden hat.

Der junge Math´matik-Student,
der dies begriffen hat und kennt,
der hat ein sich´res Fundament,
Wenn frohgemut er weiter rennt.

**Grenzwertsätze**

Mit zwei konvergenten Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ sind auch die Summen-, Differenz-, Produkt- und Quotientenfolgen konvergent und es gelten die in Formeln und Tafeln (FuT) aufgeführten Grenzwertsätze, illustriert an den folgenden Beispielen:

Beispiele:
a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}$$

Zähler und Nenner werden durch die höchste Potenz von n dividiert.

b)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{\frac{n+3}{n}}+1}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$$

Übungsaufgabe:
In den folgenden Fällen ist das Konvergenzverhalten der angegebenen Folgen zu untersuchen:

a) $a_n=\frac{4n^2+5}{7n^2+3,}$ b) $a_n=\frac{1}{n}\cdot\left(n^2+\frac{1}{n}\right)$ c) $1,-\frac{1}{2},\frac{2}{3},-\frac{3}{4},\frac{4}{5},-\frac{5}{6}$
d) $a_n=\frac{3n+4(-1)^n}{n,}$ e) ) $a_n=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Lösung:
a) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{4}{7}$, die Folge ist konvergent
b) $a_n=n+1$, die Folge ist (bestimmt) divergent
c) divergent, die Folgenglieder kommen -1 und 1 beliebig nahe. 1 und -1 sind sogenannte Häufungspunkte der Folge.
d) $a_n=2+\frac{4(-1)^n}{n,}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$, die Folge ist konvergent
e) die Folge ist periodisch mit den Folgegliedern 1, 0, - 1, 0, ….die Folge ist divergent.

**Die Eulersche Zahl e**

> Satz:
>
> Die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent.

http://www.spektrum.de/sixcms/media.php/924/april_2007_euler.pdf

**Intervallschachtelung für e**

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | 2 | 2.25 | 2.37 | 2.44 | 2.49 | 2.59 | 2.70 | 2.717 | 2.7181 | 2.71827 | 2.718280 |
| $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ | 4 | 3.38 | 3.16 | 3.05 | 2.99 | 2.85 | 2.73 | 2.720 | 2.7184 | 2.71830 | 2.718283 |

Beweis:

Der Satz wird bewiesen, indem man nachweist, dass die Folgen $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ eine sogenannte Intervallschachtelung bilden. Dazu ist zu zeigen:

1. die Folge $a_n$ ist monoton wachsend
2. die Folge $b_n$ ist monoton fallend
3. $a_n \leq b_n$ für alle n
4. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Gemäss der Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen ist durch diese Intervallschachtelung eine eindeutig bestimmte Zahl e festgelegt; e heisst Eulersche Zahl.

e ≈ 2.718281828459045...

Beweis von 1:
Dazu wird der folgende Quotient abgeschätzt:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \overset{(1)}{>} \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

woraus die Behauptung folgt, denn es gilt nach der sogenannten Bernoullischen Ungleichung (→ Vollständige Induktion) nämlich:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \qquad (1)$$

Beweis von 2:
Analog zu 1. erhält man

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \overset{(1)}{>} \left(1-\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

Der Beweis von 3. folgt unmittelbar aus

$$\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} > 1$$

Beweis von 4:
Wegen

$$b_n - a_n = b_n - b_n \cdot \frac{n}{n+1} = b_n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = b_n \cdot \frac{1}{n+1} < b_1 \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{4}{n+1} \text{ gilt:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{n+1} = 0$$

Ein zweiter Beweis ergibt sich aus dem folgenden wichtigen

> Satz:
> Eine monotone und beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

Es kann nämlich gezeigt werden, dass die Folge $a_n$ monoton wachsend und beschränkt ist. (siehe die folgende Beilage aus dem Skript der Vorlesung von H. Huber ETHZ oder in der Literatur).

S A T Z . Die Zahlfolge

$$(1+\frac{1}{1})^1,\ (1+\frac{1}{2})^2,\ (1+\frac{1}{3})^3,\ \ldots,\ (1+\frac{1}{n})^n,\ \ldots$$

ist monoton wachsend und beschränkt.

B E W E I S .

1. Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$

Beweis: Wir stützen uns auf den binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)\,n}}_{=1}\cdot b^n$$

Spezialfälle: $(a+b)^2 = a^2 + \frac{2}{1}ab + \frac{2\cdot 1}{1\cdot 2}b^2$,

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1}a^2b + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}ab^2 + \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3}b^3.$$

Es gilt also:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1\,(1-\frac{1}{n})}{1\cdot 2} + \frac{1\,(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1\,(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})(1-\frac{n-1}{n})}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n}$$

Ferner ist

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1\,(1-\frac{1}{n+1})}{1\cdot 2} + \frac{1\,(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots +$$

$$+ \frac{1\,(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})}{1\cdot 2\cdots n} + \frac{1\,(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})}{1\cdot 2\cdots(n+1)}.$$

Entsprechende Glieder sind beim ersten Ausdruck kleiner als beim zweiten. Ausserdem enthält der zweite Ausdruck einen (positiven) Term mehr. Daraus folgt die Behauptung.

2. Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

Beweis:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1\,(1-\frac{1}{n})}{1\cdot 2} + \frac{1\,(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1\,(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})}{1\cdot 2\cdots n} \leq$$

$$1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 .\ \text{QED}$$

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt, dass die betrachtete Zahlfolge konvergiert, und zwar, da alle Glieder zwischen 2 und 3 liegen, gegen eine Zahl aus dem Intervall $[2,3]$.