Beispiele für Modellierungen

Beispiel: Medikamentenspiegel im Körper:

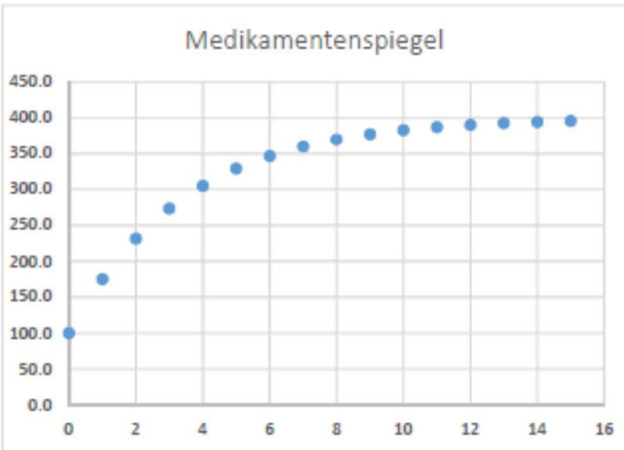
Bei diesem einfachen Modell treffen wir die folgenden vereinfachenden Annahmen:
Die Anfangsdosis eines Medikaments betrage 100 mg und diese wird alle 4 Stunden erneut abgegeben. Innerhalb dieser 4 Stunden werden jeweils 25% des Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden.
Wie entwickelt sich der Medikamentenspiegel im Körper im Laufe der Zeit?

Wir bezeichnen die im Körper nach n Perioden zu 4 Stunden vorhandene Menge des Medikaments in mg mit d_n. Für d_n gilt dann die folgende rekursive Beschreibung:
$d_0 = 100$ und $d_{n+1} = \frac{3}{4} \cdot d_n + 100 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$
Die langfristige Entwicklung kann dann numerisch bestimmt werden:

Medikamentenspiegel

c	r
100	0.75

n	d_n
0	100.0
1	175.0
2	231.3
3	273.4
4	305.1
5	328.8
6	346.6
7	360.0
8	370.0
9	377.5
10	383.1
11	387.3
12	390.5
13	392.9
14	394.7
15	396.0



Es ist zu erkennen, dass sich der Medikamentenspiegel langfristig 400 mg nähert.
Es handelt sich um beschränktes Wachstum.

Allgemein:

Es sei
r die Abbaurate (im Beispiel r = 0.75)
c die Anfangsdosis in mg
d_n die Menge des Medikaments in mg nach n Perioden

d_n kann mit der Rekursionsformel $d_{n+1} = r \cdot d_n + c$ schrittweise berechnet werden:
$d_1 = r \cdot d_0 + c$
$d_2 = r \cdot d_1 + c = r \cdot (r \cdot d_0 + c) + c = r^2 d_0 + c(r+1)$
$d_3 = r \cdot d_2 + c = r \cdot \left(r^2 d_0 + c(r+1)\right) + c = r^3 d_0 + c(r^2 + r + 1)$
$d_4 = r \cdot d_3 + c = r \cdot \left(r^3 d_0 + c(r^2 + r + 1)\right) + c = r^4 d_0 + c(r^3 + r^2 + r + 1)$
…
Mit induktivem Schliessen ergibt sich schliesslich eine explizite Formel für d_n:
$$d_n = r^n d_0 + c(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + r + 1) = r^n d_0 + c \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$
Mit wachsendem n kommt dieser Ausdruck schliesslich dem folgenden Wert beliebig nahe:
$\lim_{n\to\infty} \left(r^n d_0 + c \cdot \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{c}{1-r}$ sofern $0 < r < 1$.

Weitere Fragen:
Verhalten des Wachstumsmodells wenn
r > 1 (Geburtenüberschuss) bzw. c < 0 (Wanderungsverlust)

Literatur:
Hupfeld: Dynasys. Modellbildung und Simulation dynamischer Systeme. Freeware. 2004
Download http://code.google.com/p/dynasys/

Eine stetige Betrachtung statt diskreter Zeitschritte führt auf
→Differentialgleichungen (siehe Analysis 2).