8. Nichtabbrechende geometrische Reihen

Frage:
Wie verhalten sich die Folgenglieder q^n, wenn n über alle Grenzen wächst?
Beispiele: $q = 2, 1.01, 1, 0.99, \pm 0.5$. Welchen Einfluss hat das Vorzeichen von q?

Ergebnis:
Für $-1 < q < 1$ nehmen die Beträge der Folgenglieder mit wachsendem n ständig ab und werden schliesslich beliebig klein (für negative q wechseln zudem die Potenzen q^n das Vorzeichen). Die Beträge der Folgenglieder werden schliesslich kleiner als jede noch so kleine positive Schranke ε, sofern nur n hinreichend gross gewählt wird.

Formulierungsvariante:
Wie klein man auch immer eine Umgebung von 0 wählt, es liegen stets nur endlich viele Glieder ausserhalb dieser Umgebung.

Dazu ein Beispiel mit $\varepsilon = 10^{-500}$
Für welche n gilt $0.999^n < 10^{-500}$
Wegen $n > \dfrac{-500}{\log_{10} 0.999} = 1'150'716.8$ ist $n \geq 1'150'717$

Gilt für eine Folge a_n der oben beschriebene Sachverhalt, dann sagen wir, die Folge hat für n gegen unendlich den Grenzwert 0 und schreiben dafür:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

> Definition:
> Die Folge (a_n) hat für n gegen unendlich den Grenzwert a genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ es eine Zahl $N(\varepsilon)$ so gibt, dass für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Mit dieser Definition gilt damit der folgende

> Satz 1:
> $|q| < 1 \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Ein strenger Beweis dieses Satzes kann mit der sogenannten Bernoullischen Ungleichung (→ Vollständige Induktion) erfolgen.

Bemerkung
Hat eine Folge einen endlichen Grenzwert, so sagt man, sie ist konvergent.

Für $q > 1$ oder $q < -1$ d.h. für $|q| > 1$ werden die Beträge der Folgenglieder schliesslich grösser als jede noch so grosse positive Zahl. In diesem Fall hat die Folge keinen Grenzwert. Wir sagen: Die Folge hat keinen endlichen Grenzwert, sie ist divergent.
Dazu ein Beispiel:
$1.01^n > 10^{999}$ gilt für n > 231176.5

Zusammenfassung:

Für $|q| > 1$ hat die Folge q^n keinen Grenzwert, sie ist divergent.

Für $|q| < 1$ hat die Folge q^nden Grenzwert 0, die Folge ist konvergent. Die Folge q^n ist eine sogenannte Nullfolge.

Spezialfälle:

$q = -1$ Die alternierende Folge -1, 1, -1, 1, -1,… hat keinen Grenzwert

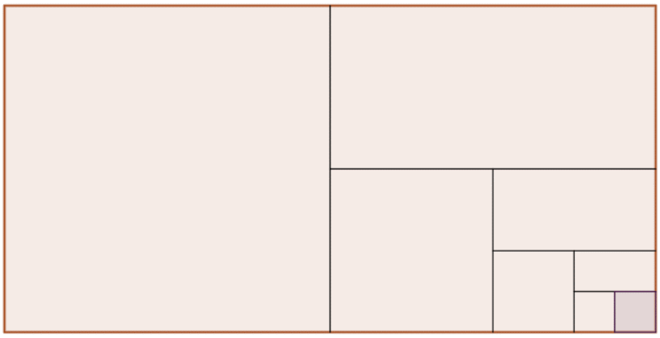
$q = 1$ Die konstante Folge hat trivialerweise den Grenzwert 1.

Durch Addition der Glieder einer Folge, erhält man die zugehörige Reihe.

Im Folgenden untersuchen wir das Verhalten von geometrischen Summen für wachsende n.

Beispiel:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$s_1 = 2 - 1$$
$$s_2 = 2 - \frac{1}{2}$$
$$s_3 = 2 - \frac{1}{4}$$
…
$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$



Addiert man hinreichend viele Glieder dieser Folge, so unterscheiden sich die Summen s_n schliesslich von 2 beliebig wenig (durch jeden weiteren Summanden wird der Abstand zu 2 halbiert). Wir sagen dafür: s_n hat für n gegen unendlich den Grenzwert 2.

Allgemein gilt:

Satz 2:
Die nichtabbrechende geometrische Reihe hat für $-1 < q < 1$ die Summe

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \quad (*)$$

Begründung:
Gemäss Satz 1 hat der Zähler in der Summenformel der geometrischen Reihe den Grenzwert 1.

Beispiel:

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Bei dieser alternierenden Reihe nähern sich die Teilsummen dem Grenzwert von beiden Seiten.

Bemerkung:
Das Wort Summe ist als Abkürzung für den Grenzwert der Teilsummenfolge s_n zu verstehen. Bei der Untersuchung von Reihen betrachtet man also die zugehörige Teilsummenfolge (vgl. → harmonische Reihe).

Übungsaufgabe:
Von einer nichtabbrechenden geometrischen Reihe mit der Summe 16 kennt man das erste Glied. Wie heisst das zweite Glied?
Lösung:
$q = 1 - \frac{a_1}{s} = -\frac{3}{4}, \ a_2 = -21$

Die folgenden historischen Beispiele illustrieren den unbeschwerten Umgang mit dem Unendlich Grossen und Unendlich Kleinen:

Aus „Vollständige Anleitung zur Algebra“:
In (*) $a_1 = 1$ und $q = 1$ gesetzt $\frac{1}{0} = 1+1+1+1+1+...$
„Wir haben aber schon oben bemerkt, dass 1/0 eine unendlich grosse Zahl sei, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätigt.“
In (*) $a_1 = 1$ und $q = 2$ gesetzt $\frac{1}{-1} = 1+2+4+8+16+...$
„welches dem ersten Anblick nach ungereimt erscheint“
In (*) $a_1 = 1$ und $q = -1$ gesetzt $\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+...$
„so kann weder 1 noch 0 herauskommen, sondern etwas dazwischen, welches $\frac{1}{2}$ ist.“

Periodische Dezimalbrüche

Periodische Dezimalbrüche können als nichtabbrechende geometrische Reihen aufgefasst werden.

Beispiele:
a)
$0.272727272727..... = 0.27 + 0.0027 + 0.00027 + ... = \frac{27}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$
b)
$0.23636363636... = \frac{1}{5} + 0.036363636 ... = \frac{1}{5} + \frac{36}{990} = \frac{13}{55}$

Aufgabe:
Gegeben ist der folgende periodische Bruch im Zwölfersystem $b = 0.255555...$ Wie heisst die Bruchdarstellung von b im Dezimalsystem?

$b = \frac{2}{12} + \frac{5}{144} + \frac{5}{1712} + \cdots = \frac{2}{12} + \frac{5}{132} = \frac{27}{132} = \frac{9}{44}$

Aufgabe:
Welchen Fehler r_n begeht man, wenn man die nichtabbrechende Reihe nach dem n-ten Glied abbricht?

Der Fehler r_n ist eine nichtabbrechende geometrische Reihe mit dem Anfangsglied aq^n

$$r_n = \frac{aq^n}{1-q} \qquad \text{mit } -1 < q < 1$$

Beispiel:
Nähert man den periodischen Dezimalbruch 0.272727272727..... durch 0.27 an, so beträgt der Fehler

$$r_1 = \frac{27}{10\,000} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{9900} = \frac{3}{1100}$$ also ungefähr 0.3%

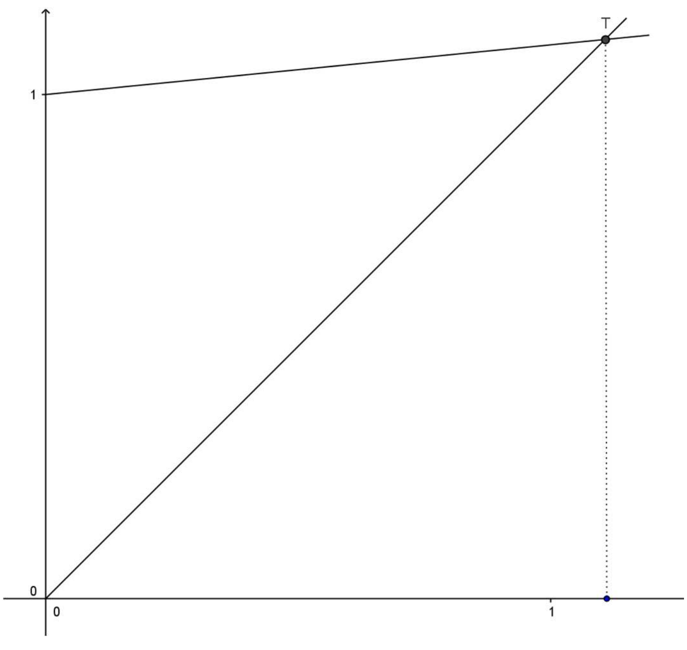
Das Sophisma (spitzfindige Folgerung) des Zenon von Elea (um 450 v.Chr.)

Zenon lehrte: "Der fliegende Pfeil fliegt nicht, denn wie sollte er in einer begrenzten endlichen Zeit eine Strecke durchfliegen, die man doch beliebig oft (also in unendlich viele Teile) zerlegen kann? (vgl. die Beilage)

Achilles verfolgt eine Schildkröte, die einen Vorsprung von 1 Stadion (ca. 192 m) hat mit 10-facher Geschwindigkeit. Wenn Achilles dahin gelangt, wo die Schildkröte anfangs war, so ist diese um $\frac{1}{10}$ Stadion voraus; hat Achilles diese Strecke durchlaufen, so ist die Schildkröte um $\frac{1}{100}$ Stadion weitergekrochen usw. Achilles kann also die Schildkröte nie einholen. Worin liegt der Trugschluss? Wo holt Achilles die Schildkröte wirklich ein?

Der Einholweg s in Stadien kann als nichtabbrechende geometrische Reihe geschrieben werden:

$$s = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = \frac{10}{9}$$



Im Laufe des Rennens nimmt der Vorsprung der Schildkröte ab. Wird dieser immer kleiner werdende Vorsprung zu unendlich vielen Zeitpunkten gemessen, dann nimmt die für das Zurücklegen dieser Strecke benötigte Zeit ebenfalls ab. Der Einholzeitpunkt $\frac{10}{9}$ ist zwar Grenzwert dieser Folge, er wird aber in dieser Folge nicht erreicht. In der realen Zeit bzw. durch andere Folgen von Zeitpunkten überholt Achilles selbstverständlich die Schildkröte, sofern nur von der Folge der Zeitpunkt $\frac{10}{9}$ überschritten wird.
Der Widerspruch kann also aufgelöst werden, wenn zwischen der realen Zeit (Menge der reellen Zahlen) und der Zeit, die beim gleichförmigen Durchlaufen einer Folge vergeht, unterscheiden wird (Menge der natürlichen Zahlen). In endlicher Zeit können sich unendlich viele Vorfälle ereignen.
(nach Bender, Fehlvorstellungen bei Folgen und Grenzwerten MNU 44/4)

Café Mathe – ein Stück Mathematik, zu einer Tasse Kaffee zu geniessen

Warum selbst der schnellste Läufer die Schildkröte nie einholen kann

ARMIN P. BARTH

Es gibt wohl kaum ein unfaireres Rennen als das zwischen einem menschlichen Läufer und einer Schildkröte. Das Tier ist absolut chancenlos, und der menschliche Läufer dürfte schon ausser Sichtweite sein, bevor die Schildkröte sich merklich vom Startpunkt wegbewegt hat. Die Situation ändert sich aber dramatisch zugunsten der Kröte, wenn ihr ein Vorsprung gewährt wird. Dann ist sie sogar uneinholbar, und das ist wirklich eine erstaunliche Angelegenheit!

Glauben Sie mir nicht? Nun, hier ist der Beweis: Wir stellen uns vor, ein Läufer und eine Schildkröte seien zum Rennen verabredet. Die Rennbahn ist eine schnurgerade und beliebig lange Strecke, und aus Mitleid lässt der Läufer dem Tier einen Vorsprung von 100 Metern. Um präziser argumentieren zu können, führen wir noch zwei Bezeichnungen ein: Den Buchstaben S für den Startpunkt des Läufers und den Buchstaben A für den Startpunkt der Schildkröte (vgl. Abbildung). Auf Kommando starten beide gleichzeitig. Nun dauert es eine bestimmte Zeit, bis der Läufer die Stelle A erreicht, an der die Schildkröte gestartet ist. In dieser Zeit hat sich die Schildkröte natürlich bewegt. Sagen wir, sie erreicht die Position B exakt in dem Augenblick, in dem der Läufer die Stelle A erreicht. Nun muss der Läufer, will er das Tier einholen, die Stelle B erreichen, und dazu benötigt er eine gewisse Zeit. Wenn er in B ankommt, ist die Schildkröte nicht mehr dort, denn sie ist in dieser Zeit an eine Stelle C weiter«gerannt». Nun muss der Läufer, will er das Tier einholen, die Stelle C erreichen, und dazu benötigt er eine gewisse Zeit. Wenn er in C ankommt, ist die Schildkröte nicht mehr dort, denn sie ist in dieser Zeit an eine Stelle D weiter«gerannt». Die Strecken, die der Läufer überwinden muss, um das Tier einzuholen, werden zwar immer kürzer, aber in jedem Augenblick ist die Schildkröte vor dem Läufer, denn man kann theoretisch unendlich viele Positionen A, B, C, D, E . . . nennen, die der Läufer erreichen muss, um das Tier einzuholen, und die das Tier aber immer schon verlassen hat in dem Augenblick, in dem der Läufer dort ankommt. Daher kann der Läufer die Schildkröte nie einholen, und in ungläubigem Entsetzen und völliger Erschöpfung wird er hinter ihr zusammenbrechen. Diese Argumentation stammt von Zenon, einem Schüler des griechischen Philosophen Parmenides, der um 500 v. Chr. im heutigen Unteritalien lebte. Es ist uns allen klar, dass der Läufer – bei Zenon handelte es sich um Achill – die Schildkröte einholen wird. Dennoch ist das Argument raffiniert und verlockend, und manch einer wird zugeben müssen, nicht genau zu verstehen, weshalb es falsch ist. Es stellt sich also die Frage, zu welchem Zweck Zenon sein Argument aufgestellt hatte. Sehr wahrscheinlich ist, dass Zenon die Lehre seines Meisters Parmenides stützen wollte, die sich ungefähr so umschreiben lässt: Gewöhnlich urteilen die Menschen aufgrund der Sinneserfahrungen; diese aber sind «ziellos» und «brausend» und bringen nichts als Wahnvorstellungen hervor. Allein die Vernunft urteilt logisch, und darum darf man nur auf sie allein vertrauen. Die Vernunft aber sagt: Aus Nichts kann nichts entstehen, also muss das Sein immer schon so gewesen sein, und es kann sich nichts verändern, denn sonst würde etwas vergehen oder zum Seienden aus dem Nichts etwas hinzukommen. Alles Sich-Verändernde ist also Trugbild, in Wirklichkeit ist immer alles eins und unverändert. Insbesondere gibt es auch keine Bewegung, denn sie wäre ja Veränderung von Seiendem. Zenon muss ein treuer Schüler gewesen sein, denn er tat alles, um die These seines Lehrers zu untermauern. Seine Geschichte vom Läufer und von der Schildkröte sollte wahrscheinlich die gegnerische Annahme, es gebe so etwas wie Veränderung und Bewegung, ad absurdum führen. Wenn es Bewegung gäbe, müsste das Rennen zwischen Achill und dem Tier möglich sein, aber dann wäre das Tier uneinholbar, was Unsinn ist. Also kann es keine Bewegung geben. Mit solchen spitzfindigen Argumenten liessen sich die Gegner von Parmenides vielleicht beeindrucken, falsch sind sie aber trotzdem.

Man kann zwar unendlich viele Vorsprünge der Schildkröte auflisten: AS, BA, CB, DC, ED und so fort, das heisst aber noch lange nicht, dass alle diese unendlich vielen kleiner werdenden Strecken zu einer unendlich langen Gesamtstrecke führen oder dass unendlich viel Zeit benötigt wird, um sie alle zurückzulegen. Sie können, geschätzte Leserinnen und Leser, sogar genau ausrechnen, wann und wo der Läufer das Tier ein- und überholen wird. Nehmen Sie nur mal an, der Läufer sei doppelt so schnell wie das Tier. Wie lang sind dann die Vorsprünge AS, BA, CB, DC . . .? Welche Gesamtsumme ergibt sich bei Addition aller Vorsprünge? Und in welcher Zeit wird der Läufer diese Gesamtdistanz zurücklegen?

ARMIN P. BARTH, Wetzikon, ist Gymnasiallehrer an der Kantonsschule Baden und Autor.

MZ/AT 6. 1. 09

A: Einleitung

Wieder einmal geb´ ich die Sporen
dem geplagten Pegasus,
knall die Peitsch ihm um die Ohren,
dass er fort mich tragen muss,
dorthin, dorthin, denn ich will es,
wo man keinen Mangoldt (2) kennt,
wo die Kröte mit Achilles
um den Preis Olympias rennt.

B: Ausführung

Der Zenon, den ein jeder kennt,
war zu Elea einst Dozent.
Er schrieb gar viel, was schön und wichtig,
es war nur leider niemals richtig.
Die mathematische Wissenschaft
war ihm noch ziemlich schleierhaft;
jedoch als ob er was verstände,
schrieb er darüber ganze Bände.
Als einstens er beim Morgenfrass
mal recht vergnügt im Schlafrock sass
und ihm Athener Tageblatt
das Wichtigste gelesen hatte
(die marathonische Keilerei,
den Aufruf der griechischen Volkspartei“),
sprach schmunzelnd der: Hm,hm, ja, ja,
jetzt mach´ ich mal so´n Sophisma!

Schildkröten sind uns hierzuland´
als plump und langsam wohlbekannt
Achill, so schliess ich, weil ich hell,
läuft sicherlich zehnmal so schnell.
Je nun, er rennt, so denk ich mir
mal um die Wette mit dem Tier.
Zehn Meter Vorsprung geb´ er bloss;
Dies Zugeständnis scheint nicht gross.
Die Glocke tönt, der Kampf fängt an,
nun gute Kröte halt´ Dich ran!
Zehn Meter läuft Achilles heiter;
die Kröte ist ´nen Meter weiter.
Auch diesen läuft Achill in Eil;
die Kröte läuft den zehnten Teil.
Auch dieses Stück durchmisst Achill,
doch ach, das Vieh steht auch nicht still;
sie ist trotz allem etwas weiter;
Achilles ist schon nicht mehr heiter.
So wiederholt sich stets dies Spiel,
und nimmer kommt der Held zum Ziel. (2)
Nimmt er der Kröte alten Ort,
schwupp! ist sie auch schon wieder fort.
Er kommt in Wut bis zur Ekstase;
die Kröte dreht ihm eine Nase.
Sie bleibt ihm stets ein Stück voraus;
Achilles schleicht geknickt nach Haus;
Die Kröte aber triumphiert
und wird mit Orden dekoriert.“

Als Zenon dies verfertigt hat,
schickt er es gleich dem Tageblatt;
die Redaktion, dieweil sie helle,
zahlt eine Drachme auf der Stelle
und bringt das Zeug nach einer Weile
recht gross im Unterhaltungsteile.
Man liest´s, soweit man gut gelaunt,
man räuspert sich und ist erstaunt,
doch weiss man nicht, weshalb´s nicht stimmt.

Das kam, weil, das ist sonnenklar,
der Mangoldt (1) nicht erfunden war!
Hätt man gehört bei Dr. Feigl,(3)
der Zenon, trüg kein Lorbeerzweigl (autsch!)
man hätt gewusst, was uns verständlich:
der Wert der Reihe ist ja endlich!
Der Limes ist, so schliess ich schlau,
sogar der Treffpunkt ganz genau
Da in der Reihe, wie wir sehn,
nur positive Glieder stehn
die Teilsumme, wie Ihr wohl wisst,
stets kleiner als der Limes ist.
Indem er nun nur Stellen zählt,
die vor dem Treffpunkt sind gewählt,
lügt er dem biedern Publiko
nun vor, es bleibe immer so!
und das besagte Publikum
glaubt ich alles, weil es dumm.
Wir glauben’s nicht, denn wir sind schlau;
wir wissen sowas ganz genau.

C: Schluss

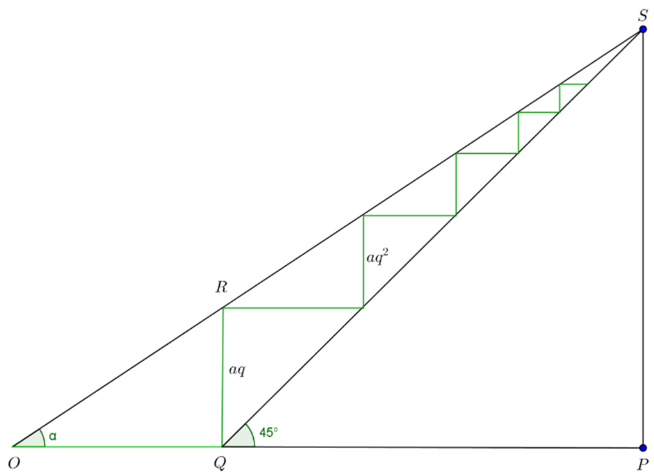
Und die Moral von der Geschicht´:
Es geht halt ohne Mangoldt nicht!
So kauf ihn Dir noch heute drum;
sonst kostet´s mehr, und das wär dumm.
(Es muss ja nicht der Mangoldt sein,
uns fällt sogar was Bessres ein).

(1)
Mangoldt ist Autor des Standardwerks „Mangoldt-Knopp“
(2)
Der Schluss ist ja impertinent!
Die Reihe ist doch konvergent!)
(3)
Feigl war Lehrer des „Dichters“

Geometrische Veranschaulichung der Summenformel für 0 < q < 1

Abbildung: $a_1 = 3, a_2 = 2$

Die nichtabbrechende Summe kann für $0 < q < 1$ durch einen nicht abbrechenden Streckenzug veranschaulicht werden.



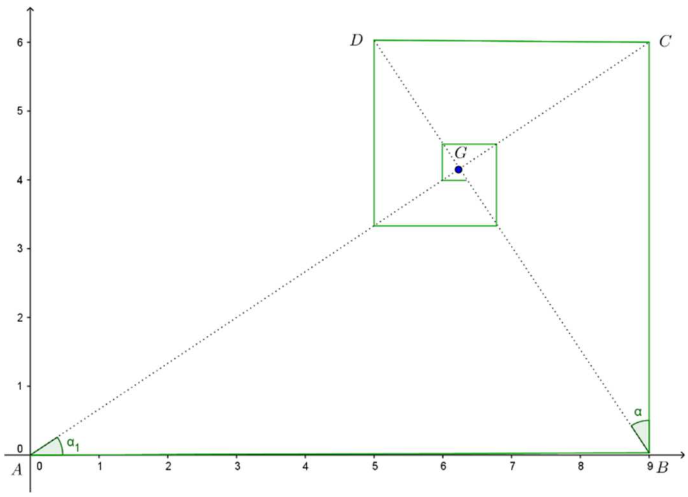
Nach dem 2. Strahlensatz (bzw. Definition des Tangens) gilt:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}} = \frac{a_2}{a_1} = q = \frac{\overline{SP}}{\overline{OP}} = \frac{s-a_1}{s}$$

und daraus

$$s = \frac{a_1}{1-q}$$

Aufgabe:
Welche Länge L hat die nicht abbrechende Spirale und welche Koordinaten hat der Grenzpunkts G?



$a_1 = 9$, q = $\frac{2}{3}$ (Einheit: 2 Häuschen)

Länge L der Spirale:

$$L = 9 + 6 + 4 + \cdots = \frac{9}{1-\frac{2}{3}} = 27$$

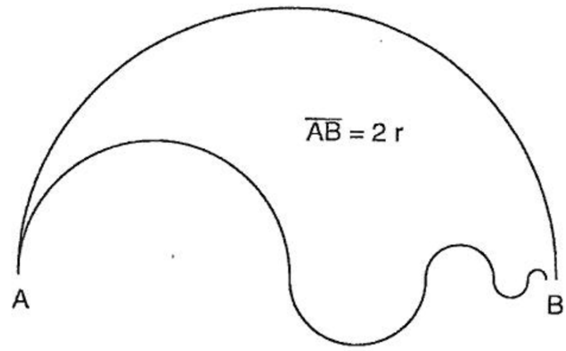
$$x_G = 9 - 4 \pm \cdots = \frac{81}{13}$$
$$y_G = 6 - \frac{8}{3} \pm \ldots = \frac{54}{13}$$

Lösungsvariante:
Der Grenzpunkt G ist der Schnittpunkt der aufeinander senkrecht stehenden Geraden AC und BD.

AC : $y = \frac{2}{3} \cdot x$
BD: $y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{27}{2}$

Gleichsetzen der rechten Seiten ergibt erneut die Koordinaten des Grenzpunkts G $\left(\frac{81}{13}, \frac{54}{13}\right)$.

Übungsaufgabe:
Der Schlangenweg von A nach B setzt sich aus unendlich vielen Halbkreisbogen zusammen, deren Radien eine geometrische Folge mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$ bilden.



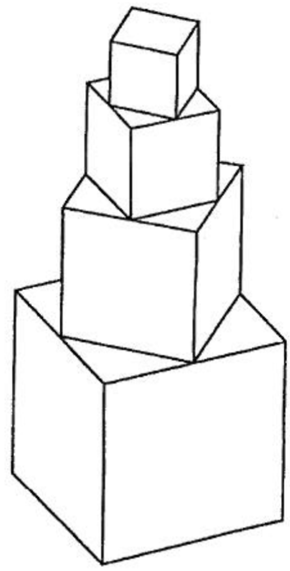
a)
Ist der Schlangenweg oder der Halbkreisweg von A nach B kürzer?

b)
Welchen Flächeninhalöt hat das Gebiet, das von sämtlichen Halbkreisen eingegrenzt wird.

Lösung:
a) Beide Wege haben die Länge πr
b) $0.4\pi r^2$

Übungsaufgabe:
Einem Würfel mit Kantenlänge 1 Meter wird ein zweiter Würfel so aufgesetzt, dass die Ecken der Grundfläche des zweiten Würfels auf die Kantenmitten der Deckflächen des ersten Würfels zu liegen kommen. Auf gleiche Weise wird dem zweiten Würfel ein dritter aufgesetzt, usw.

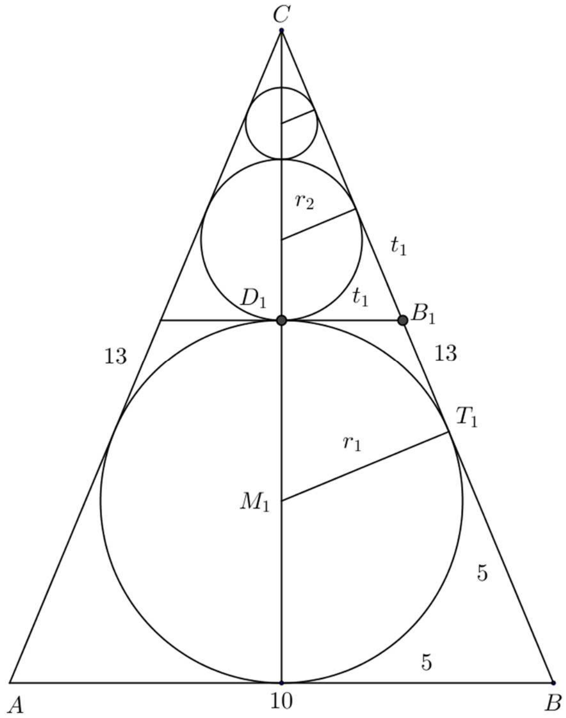
Wie hoch wird der Würfelturm höchstens?



Lösung:

$$h = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4142 \text{ m}$$

Übungsaufgabe:
In ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $b = 10$ und den Schenkeln $c\ = 13$ sind der Inkreis und wie in der Abbildung eine nichabbrechende Folge von Kreisen eingezeichnet, welche die Schenkel und die benachbarten Kreise berühren. Wie gross ist die Summe der Kreisdurchmesser?



Lösung:
Die Summe ist gleich der Dreieckshöhe, die sich nach Pythagoras zu $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ergibt.
Die in der Figur vorkommenden rechtwinkligen Dreiecke sind ähnlich und ihr Kathetenverhältnis ist 5:12. Die Kreisradien bilden deshalb eine geometrische Folge.

Dreieck M_1T_1C:
$\frac{r_1}{13-5} = \frac{5}{12} \qquad r_1 = \frac{10}{3}$

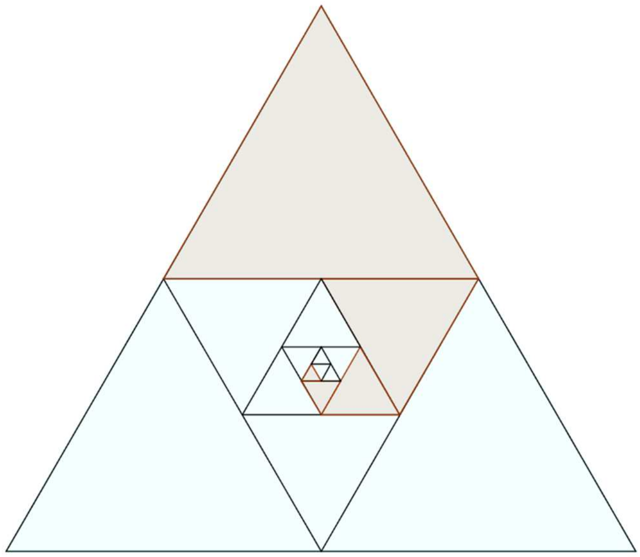
Dreieck D_1B_1C:
$\frac{t_1}{5} = \frac{12-2r_1}{12} \qquad t_1 = \frac{20}{9}$

$\frac{r_2}{8-2t_1} = \frac{5}{12} \qquad r_2 = \frac{40}{27}$

$q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{40}{27} \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{9}$
Für die nichtabbrechende Sume der Kreisdurchmesser ergibt sich damit wie erwartet:
$s = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = 12$

Aufgabe:
1. In ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 16 wird sein Seitenmittendreieck gezeichnet Eines der drei entstehenden Eck-Teildreieckewird markiert.
2. Im (letzten) Seitenmittendreieck wird wieder dessen Seitenmittendreieck gezeichnet und Dasjenige Eckdreieck, das an das vorher markierte anliegt wird markiert.
3. Der Schritt 2 wird weiderholt. solange es die Zeichengenauigkeit zulässt.

a) Wie gross wird die von den markierten Dreiecken bedeckte Fläche, wenn das Verfahren beliebig oft wiederholt wird?
b) Welche Länge hat in diesem Fall der nicht abbrechende Streckenzug, der sich aus je einer Seite der markierten Dreiecke ergibt?



Wird die Fläche des ersten Dreiecks als 1 angenommen, so ergibt sich die Flächensumme als Summe einer nichtabbrechenden geometrischen Reihe

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Da im Dreieck drei kongruente Spiralen eingezeichnet werden können, muss diese Summe gleich einem Drittel der Fläche des ersten Dreiecks sein.

Für die Streckensumme ergibt sich (mit der Einheit Seitenlänge):

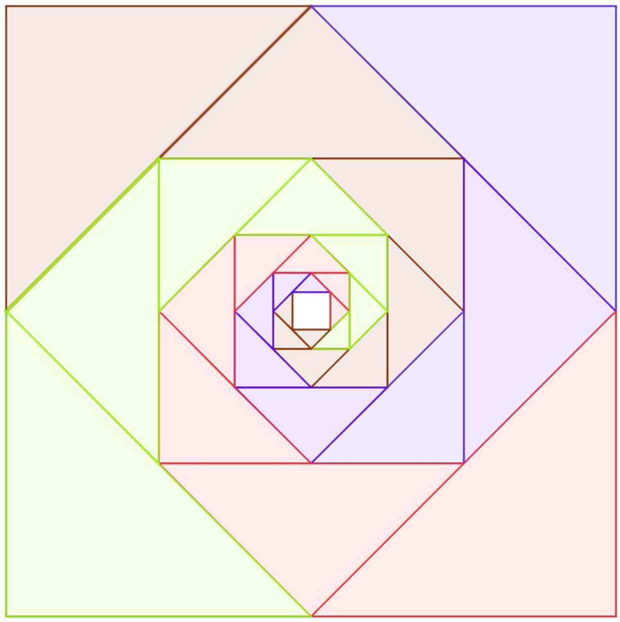
$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$$

Diese Summe kann auf die erste zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

Das Resultat ist anschaulich, denn bei der Abwicklung der Spirale auf der Dreieckseite kommt mit jedem neuen Stück die Hälfte der Ergänzung zur ganzen Seite dazu.

Lösung der analogen Aufgabe in einem Quadrat:



Flächensumme
$A = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{4}$

In diesem Fall füllen vier kongruente Spiralen das Quadrat aus.

Länge des Streckenzuges:

$$s = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16} + ... = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Durch geschickte Zusammenfassung der Reihenglieder kann die Summe auf bekannte Summen zurückgeführt werden:

$$s = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...\right) + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + ...\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Weiterführende Frage:
Welche Resultate ergeben sich, wenn die Idee bei regulären Fünf-, Sechsecke, ...weitergeführt wird?

Zusatzfrage:
Welche Längen haben die Spiralen, wenn die Seiten nicht halbiert, sondern in drei, vier, .. allgemein in n Teile geteilt werden (vgl. die Abbildung für n = 10)

Wählt man zunächst die Quadratseite n, so entstehen an den Ecken des Quadrats rechtwinklige Dreiecke, die zum Dreieck mit den Katheten 1 und $(n-1)$ ähnlich sind. Die Hypotenuse berechnet sich dann zu $\sqrt{(n-1)^2+1}=\sqrt{n^2-2n+2}$. Das Verhältnis aufeinanderfolgender Strecken der Spirale ist gleich dem Verhältnis aufeinanderfolgender Quadratseiten

$$q=\frac{\sqrt{n^2-2n+2}}{n}$$

Die Länge der Spirale ergibt sich damit zu

$$L=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{n^2-2n+2}}{n}}=\frac{n}{n-\sqrt{n^2-2n+2}}=\frac{n\cdot(n+\sqrt{n^2-2n+2})}{(n-\sqrt{n^2-2n+2})\cdot(n+\sqrt{n^2-2n+2})}$$

$$=\frac{n\cdot(n+\sqrt{n^2-2n+2})}{2n-2}$$

Wählt man als Seitenlänge des Ausgangsquadrat 1, so ergibt sich nach Division durch n für die Länge der Spirale:

$$L=\frac{n+\sqrt{n^2-2n+2}}{2n-2}$$

Kontrolle für n = 2: $L=\frac{2+\sqrt{2^2-2\cdot 2+2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$