11. Reihenentwicklungen

Der Konvergenzbegriff bei beliebigen Reihen wird auf den Konvergenzbegriff bei Folgen zurückgeführt (siehe auch den Abschnitt: Nichtabbrechende geometrische Reihen).

Addieren wir die n ersten Glieder einer Folge a_n , so erhalten wir die sogenannte n-te Partialsumme oder n-te Teilsumme $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

> Definition:
> Eine unendliche Reihe heisst konvergent, wenn die Folge der Partialsummen einen Grenzwert s besitzt. Dieser Grenzwert s wird als Summe der unendlichen Reihe bezeichnet. Falls die Partialsummenfolge keinen Grenzwert besitzt, heisst die Reihe divergent.

Beispiele:
a)

Die nichtabbrechende geometrische Reihe hat für $-1 < q < 1$ die Summe $s = \frac{a_1}{1-q}$

b)

Wegen $s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ hat die unendliche Reihe

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \ldots$ die Summe 1.

Im nächsten Abschnitt "Harmonische Reihen" wird das Beispiel einer divergenten Reihe besprochen.

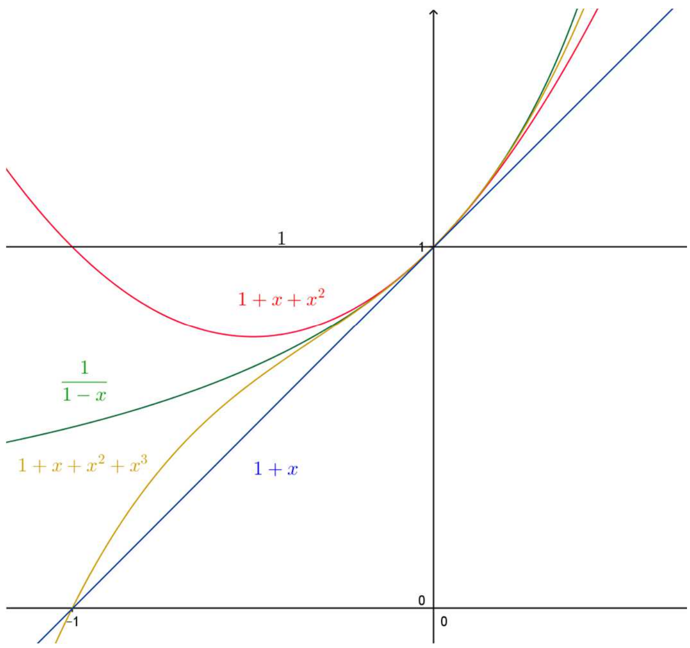
Reihenentwicklungen spielen in der Mathematik bei vielen Anwendungen eine wichtige Rolle (→ Potenzreihen).

Als einführendes Beispiel schreiben wir die Formel für die nicht abbrechende geometrische Reihe in der folgenden Form:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

Wir sagen $\frac{1}{1-x}$ wird in eine Potenzreihe entwickelt.

Skizze mit den Graphen der Näherungsfunktionen.



Einfache Anwendungen:

a)

Ein Näherungswert für $\frac{1}{0.98}$

$\frac{1}{0.98} = \frac{1}{1-0.02} \approx 1 + 0.02 + 0.04 = 1.0204$

Vergleich mit dem TR-Wert: 1.0204081632...

b)

Entwicklung von $\frac{3}{3-x}$ in eine Potenzreihe.

$\frac{3}{3-x}$ wird umgeformt zu $\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \ldots$ sofern $|x| < 3$

In Formelsammlungen findet man die Reihenentwicklungen der elementaren Funktionen wie etwa von
$sin\, x, cos\, x, ln(1 + x), \ldots.$. Ihre Herleitung erfordert zusätzliche Kenntnisse aus der Differential- bzw. Integralrechnung.

Als Beispiel sei die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion erwähnt:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$..