d) Die Beweismethode der vollständigen Induktion

Der Übergang von allgemeinen zu speziellen Aussagen heisst **Deduktion**

Beispiele:
a)

Allgemeine Aussage:	Alle Menschen sind sterblich
Spezialisierung:	Sokrates ist ein Mensch
Schluss:	Sokrates ist sterblich

b)

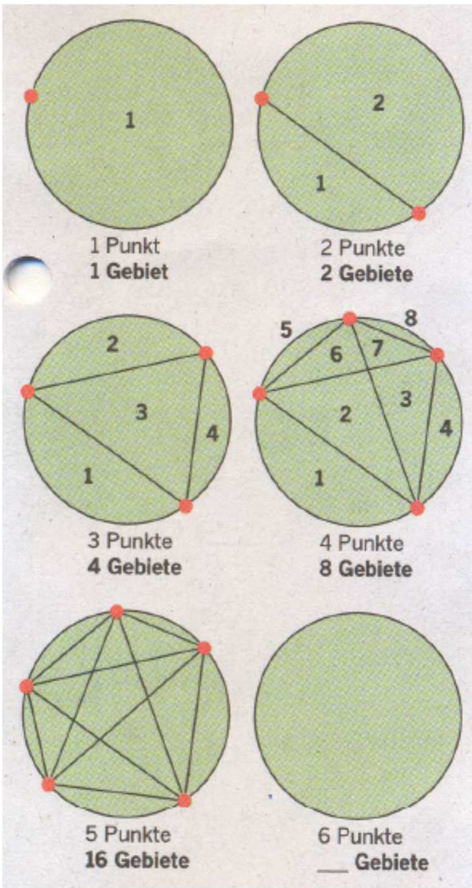
Allgemeine Aussage:	Alle ganzen Zahlen die auf 0 enden sind durch 5 teilbar
Spezialisierung:	120 endet auf 0
Schluss:	120 ist durch 5 teilbar

Der Übergang von speziellen zu allgemeinen Aussagen heisst **Induktion**.
Im Gegensatz zur Deduktion kann die Induktion zu falschen Folgerungen führen.

Beispiele:
a)
Vermutung:
$a_n = n^2 + n + 41$ erzeugt für alle natürlichen Zahlen Primzahlen (Euler)

Die Vermutung ist falsch, denn $a_{40} = 1681 = 41^2$

b)
Auf einer Kreislinie werden wie in Abbildung angegeben 1, 2, 3, 4, 5, 6, …Punkte angebracht. Wird jeder dieser Punkte mit jedem andern verbunden, so wird die Kreisfläche in g_n Gebiete zerlegt. Die angegebenen Glieder der Folge lassen vermuten, dass sich mit jedem neuen Punkt die Anzahl der Teilgebiete verdoppelt.
Es zeigt sich aber dass sechs Punkte den Kreis in maximal 31 Teilgebiete zerlegen. Die Folge a_n ist unter Namen Moserfolge bekannt und ihre ersten Glieder lauten
1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163, 256, 386, …



Damit stellt sich die Frage, wie in der Mathematik die Induktion anzuwenden ist, damit man richtige Folgerungen erhält?

Die Beweisidee kann an folgendem Experiment illustriert werden:
Wir stellen Dominosteine so auf, dass mit jedem Stein auch der nächste umkippt. Stösst man nun den ersten Stein um, dann werden alle Steine fallen:

Induktionsbeweis:
Der Beweis, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt, besteht aus zwei Schritten:

1. Induktionsverankerung:	Es ist zu zeigen, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist.
2. Induktionsschluss:	Es ist zu zeigen, dass sich die Richtigkeit der Aussage vererbt: Immer dann, wenn eine Aussage für eine Stufe richtig ist, ist sie auch für die nächste Stufe richtig.

Der italienische Mathematiker G. Peano hat 1889 die natürlichen Zahlen durch 5 Axiome charakterisiert. Das fünfte Axiom lautet:
Eine Eigenschaft, die der Zahl 1 zukommt und mit jeder natürlichen Zahl auch ihrem Nachfolger, kommt allen natürlichen Zahlen zu.

Beispiele:
a)
Beweise die explizite Formel für das n-te Glied einer geometrischen Folge.

Behauptung: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

1. Induktionsverankerung für n = 1: $a_1 = a_1 \cdot q^0 = a_1$ □
2. Induktionsschluss:
   Annahme: Die Behauptung ist richtig für die Stufe n: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (1)
   Behauptung: Die Aussage ist auch für die folgende Stufe richtig: $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$ (2)

Nachweis von 2.:
Gemäss Definition der geometrischen Folge gilt:
$a_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$ □

Bemerkung:
Nach dem Mathematiker Paul Halmos wird das Ende eines Beweises mit einem ausgefüllten Quadrat □, Halmos genannt, bezeichnet.

Die bereits erwähnten Potenzgesetze oder die Formeln in den Abschnitten arithmetische oder geometrische Folgen können ebenfalls mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

b)
Berechnet man für einige natürliche Zahlen n die Werte der folgenden Summe, so findet man leicht eine Vermutung für die Summenformel. Wie kann sie bewiesen werden?

Tipp: Allenfalls sind die Brüche zu kürzen oder zu erweitern.

$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

$s_1 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $s_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $s_3 = \frac{3}{4}$

Vermutung:

$s_n = \frac{n}{n+1}$

Induktionsbeweis:

1. Induktionsverankerung für n = 1: $\quad s_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ □

2. Induktionsschluss:

   Annahme: Die Behauptung ist richtig für die Stufe n: $\quad s_n = \frac{n}{n+1}$

   Behauptung: Die Aussage ist auch für die folgende Stufe richtig: $\quad s_n = \frac{n+1}{n+2}$

Nachweis der Vererbung:

$$s_{n+1} \overset{(1)}{=} s_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \overset{(2)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} \overset{(3)}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

(1) nach Definition von s_n
(2) nach der Induktionsvoraussetzung
(3) mit $(n+1)$ erweitert.

Übungsaufgabe:
Es ist die folgende Formel für die Summe der Kubikzahlen zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Bemerkung:
Daraus folgt unmittelbar, dass der Zähler in der Summenformel durch 6 teilbar ist (was in c) mit vollständiger Induktion bewiesen wird).

c)

Beweise: $z_n = 2n^3 + 3n^2 + n = n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ ist für alle natürlichen Zahlen durch 6 teilbar.

Induktionsbeweis:

1. Induktionsverankerung für $n = 1$: $z_1 = 6$ ist durch 6 teilbar □
2. Induktionsschluss:
   - Annahme: Die Behauptung ist richtig für die Stufe n: z_n ist durch 6 teilbar
   - Behauptung: Die Aussage ist auch für die folgende Stufe richtig: z_{n+1} ist durch 6 teilbar.

Nachweis der Vererbung:

$$z_{n+1} = 2 \cdot (n+1)^3 + 3 \cdot (n+1)^2 + n + 1 = 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6 = (2n^3 + 3n^2 + n) + (6n^2 + 12n + 6)$$
$$= z_n + 6 \cdot (n^2 + 2n + 1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der erste Summand durch 6 teilbar, der zweite Summand enthält den Faktor 6, damit ist auch die Summe also z_{n+1} durch 6 teilbar, womit die Vererbung nachgewiesen ist.

Übungsaufgabe:
Es ist die folgenden Aussage zu beweisen:
Für alle natürlichen Zahlen n ist $z_n = 8^n - 1$ ist durch 7 teilbar.

$z_1 = 8 - 1$
$z_2 = 8^2 - 1 = 8 \cdot (8 - 1) + 7$
$z_3 = 8^3 - 1 = 8 \cdot (8^2 - 1) + 7$

$z_{n+1} = 8^{n+1} - 1 = 8 \cdot (8^n - 1) + 7$

Direkter Beweis: Vergleiche die Formel für die geometrische Reihe.

d)

Beweis der Ungleichung von Bernoulli: $(1+x)^n > 1 + nx$ $\quad$ $n \in$ N, $n \geq 2$, $x > -1$, $x \neq 0$

Induktionsbeweis:

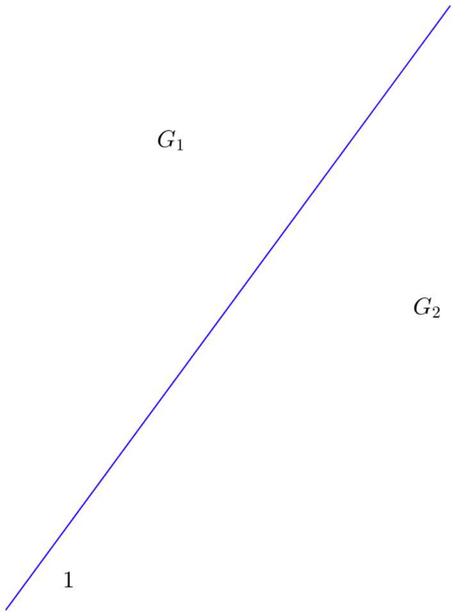
1. Induktionsverankerung für n = 2: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ (da $x^2 > 0$)□
2. Induktionsschluss:
   - Annahme: Die Behauptung ist richtig für die Stufe n: $(1+x)^n > 1 + nx$
   - Behauptung: Die Aussage ist auch für die folgende Stufe richtig: $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1) \cdot x$

Nachweis der Vererbung:
Die Induktionsannahme wird mit dem positiven Faktor $(1 + x)$ multipliziert:

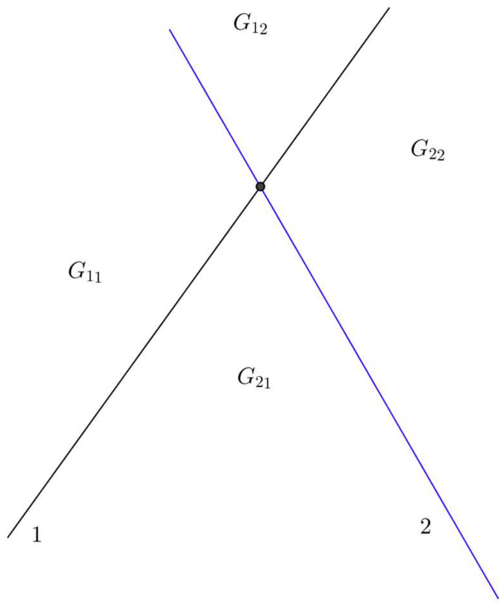
$(1+x) \cdot (1+x)^n > (1+x) \cdot (1+nx) = 1 + (n+1) \cdot x + nx^2 > 1 + (n+1) \cdot x$ (da $nx^2 > 0$) nach Vor.) □

e) Es ist der folgende Satz zu beweisen:

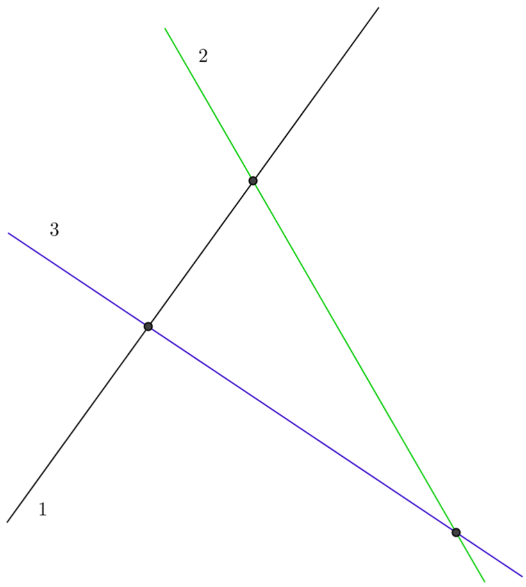
Satz:
n Geraden in allgemeiner Lage zerlegen die Ebene in $g_n = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2)$ (1) Gebiete.



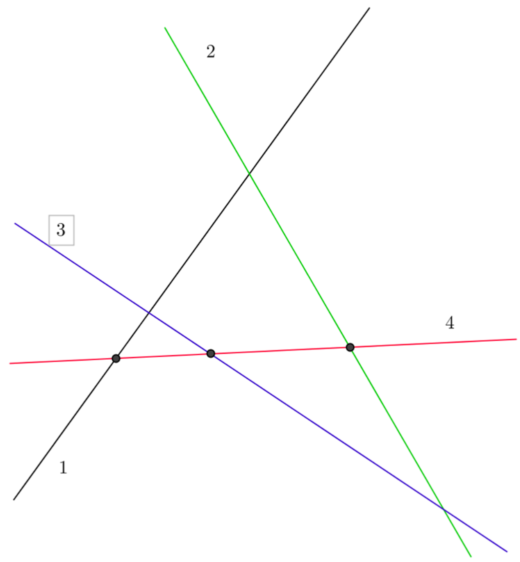
$g_1 = 2 = 1 + 1$
$= 1 + 1$



$g_2 = 4 = g_1 + 2$
$= 1 + 1 + 2$



$g_3 = 7 = g_2 + 3$
$= 1 + 1 + 2 + 3$



$g_3 = 11 = g_3 + 4$
$= 1 + 1 + 2 + 3 + 4$

Durch induktives Schliessen vermutet man mit Berücksichtigung der arithmetischen Summenformel die folgende explizite Formel:

$$g_n = 1 + (1+2+3+.....+n) = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot n(n+1) = \tfrac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2)$$

Für die Anzahl der Gebiete gilt die folgende Rekursionsformel:

$$g_{n+1} = g_n + (n+1)$$

Kommt nämlich z.B. zu $n = 3$ Geraden eine weitere dazu, so schneidet sie die bisherigen $n = 3$ Geraden in $n = 3$ Punkten, welche die neue Gerade in $n + 1 = 4$ Teile zerlegen. Jede dieser Teile zerlegt ein bisheriges Gebiet in 2 Teile, d.h. es kommen $(n + 1)$ Gebiete dazu.
Beweis von (1) mit vollständiger Induktion:

Induktionsbeweis:

1. Induktionsverankerung für $n = 1$: $g_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (1^2 + 1 + 2)$ $\square$
2. Induktionsschluss:
   Annahme: $g_n = \tfrac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2)$
   Behauptung: Die Aussage ist auch für die folgende Stufe richtig:
   $g_{n+1} = \tfrac{1}{2} \cdot ((n+1)^2 + (n+1) + 2) = \tfrac{1}{2} \cdot (n^2 + 3n + 4)$

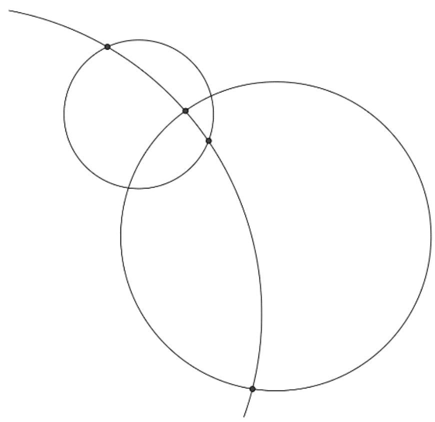
Nachweis der Vererbung:
Wegen der Rekursionsformel und der Induktionsvoraussetzung gilt:

$$g_{n+1} = g_n + (n+1) = \tfrac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2) + n + 1 = \tfrac{1}{2} \cdot (n^2 + n + 2 + 2n + 2) = \tfrac{1}{2} \cdot (n^2 + 3n + 4) \; \square$$

Übungsaufgabe:
Gesucht ist eine Rekursionsformel für die Anzahl g_n der Gebiete, in welche n Kreise allgemeiner Lage die Ebene teilen.
Es ist die folgende explizite Formel zu beweisen:

$g_n = n \cdot (n-1) + 2$

Beispiel: $n = 3$



Tip:
Es gilt die Rekursionsformel:

$g_1 = 2$ $\qquad$ $g_{n+1} = g_n + 2n$

Bemerkung:
Es ist zu beachten, dass beide Schritte eines Induktionsbeweises wesentlich sind. Es folgt ein Beispiel einer Aussage, deren Richtigkeit sich vererben würde. Die Aussage ist aber falsch, denn sie lässt sich nicht verankern.

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \tfrac{1}{8} \cdot (2n+1)^2$$

Obwohl die Aussage falsch ist, gilt tatsächlich: $s_{n+1} = s_n + (n + 1)$