1.12 Lineare Optimierung

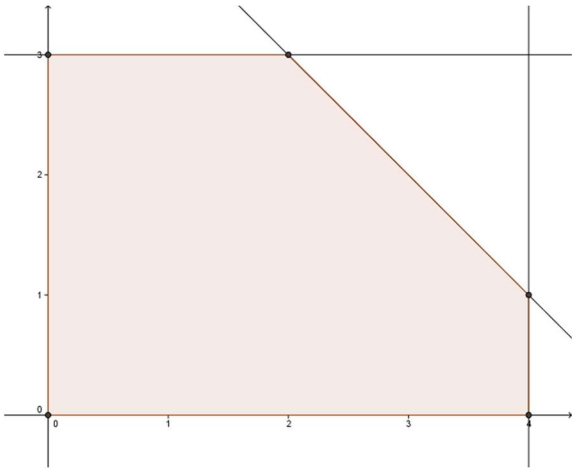
1. Lineare Ungleichungssysteme

Unter der Lösung einer linearen Ungleichung in den Variablen x und y versteht man die reellen Zahlenpaare (x, y), welche die Ungleichung erfüllen. Stellt man diese in einem Koordinatensystem dar, dann erhält man eine Halbebene. Sie wird begrenzt von der Geraden mit der zugehörigen Gleichung. Welche Halbebene die Ungleichung erfüllt, kann mit einem Testpunkt z.B. (0,0) geprüft werden.
Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems besteht aus den gemeinsamen Lösungen aller Ungleichungen d.h. aus dem Durchschnitt aller Halbebenen.

Tipp:
Es ist empfehlenswert, diejenige Halbebene zu schraffieren, die nicht zum Lösungsgebiet gehört. Die Lösungsmenge (in der Skizze gefärbt) besteht dann aus dem nicht schraffierten Gebiet.

Aufgabe:
Stelle die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems dar:

$$\left| \begin{array}{c} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \\ y \leq 5 - x \end{array} \right|$$



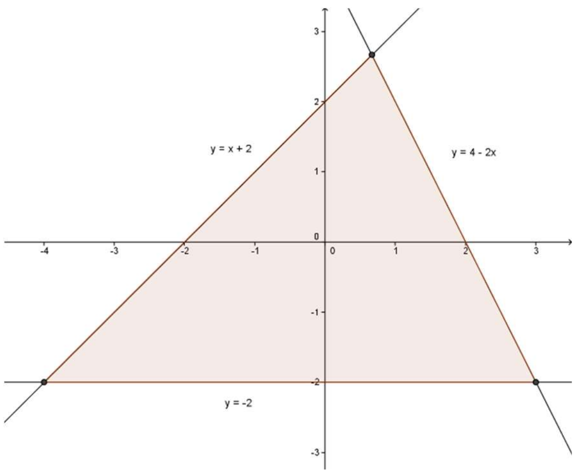
Für Ungleichungen gilt:
Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man beide Seiten mit derselben positiven Zahl multipliziert oder auf beiden Seiten denselben Term addiert oder subtrahiert. Multipliziert man mit einer negativen Zahl, so wechselt das Ungleichheitszeichen.

Übungsbeispiel:

$$\left| \begin{array}{c} -y + x + 2 > 0 \\ y + 2 > 0 \\ y + 2x < 4 \end{array} \right|$$

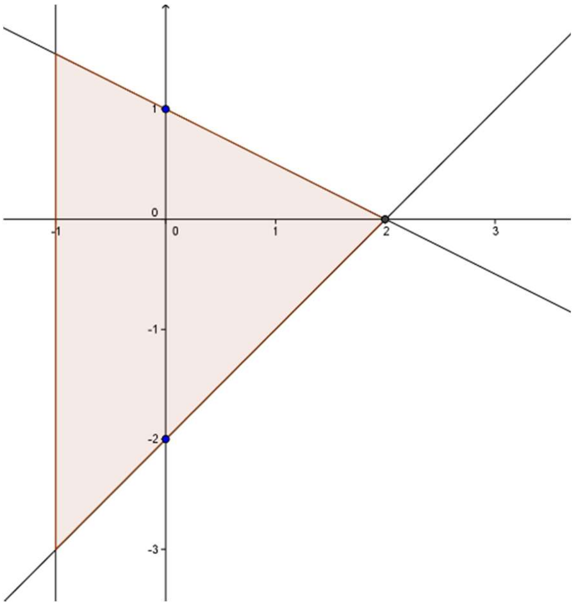
oder umgeformt:

$$\left| \begin{array}{c} y < x \\ y > -2 \\ y < 4 - 2x \end{array} \right|$$



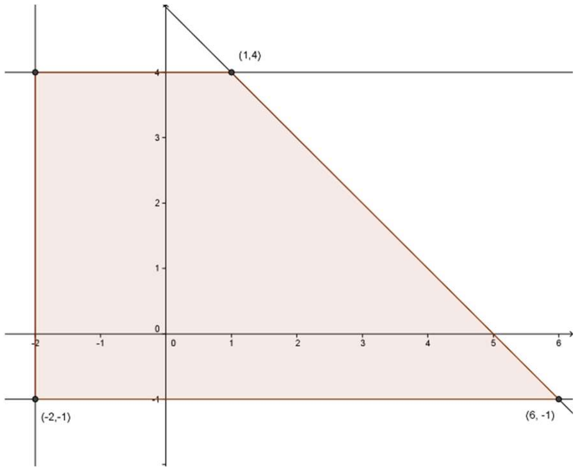
Aufgabe:
Beschreibe das folgende Gebiet durch ein System von Ungleichungen.

a)



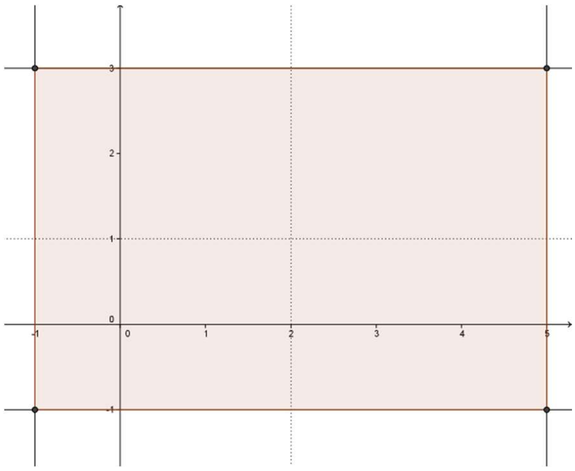
$$\left| \begin{array}{c} x \geq -1 \\ y \leq 1 - \frac{1}{2}x \\ y > x - 2 \end{array} \right|$$

b)



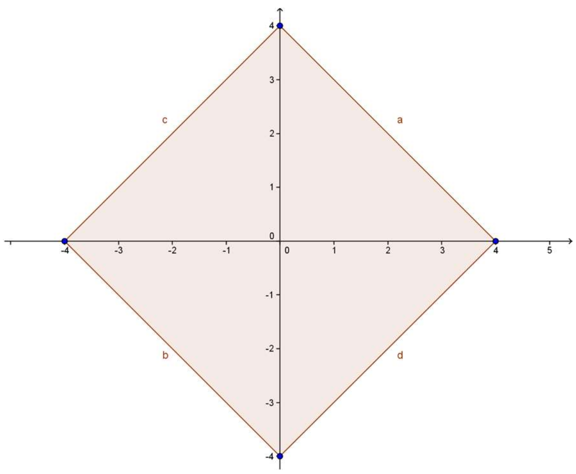
$$\left| \begin{array}{c} y \leq 4 \\ y \geq -1 \\ x \geq -2 \\ y \leq 5 - x \end{array} \right|$$

c)



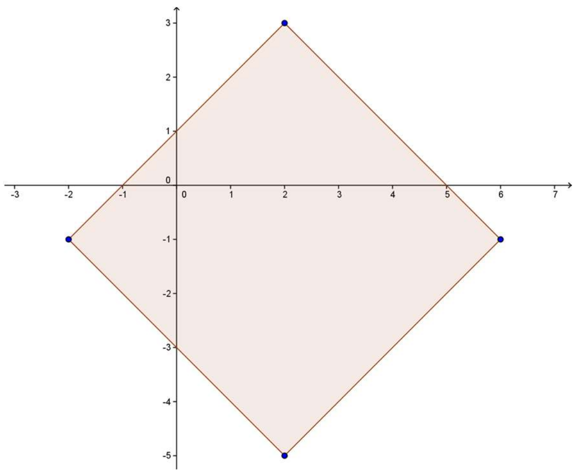
$$\left| \begin{array}{c} -1 < x < 5 \\ -1 < y < 3 \end{array} \right| \text{ oder } \left| \begin{array}{c} |x-2| < 3 \\ |y-1| < 2 \end{array} \right|$$

d)



$|x| + |y| < 4$

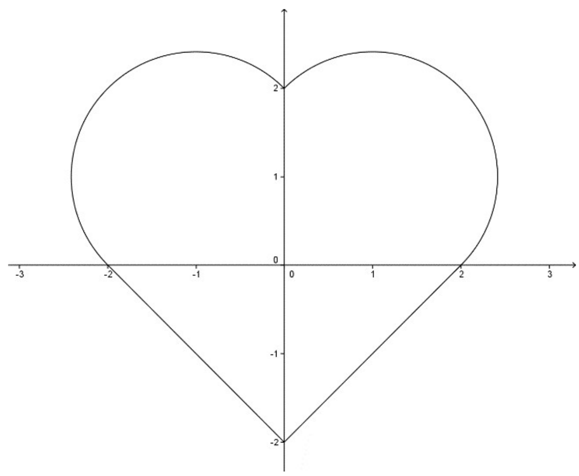
e)



$|x - 2| + |y + 1| < 4$

Beispiel für eine Punktmenge, die nicht durch ein lineares Ungleichungssystem festgelegt ist:

Gesucht ist die Menge der Punkte P
a)
für welche die Entfernung von A(-1, 1) oder B(1, 1) höchstens $\sqrt{2}$ oder die Entfernungssumme von den Koordinatenachsen höchstens 2 beträgt
b)
für welche gilt:
$(\angle APB \geq 45°) \vee (|x| + |y| \leq 2)$,
wobei A(0, 0) und B(0, 2)



2. Lineare Optimierung

Die lineare Optimierung ist ein wichtiges Hilfsmittel bei Planungsaufgaben. Es geht darum, unter gegebenen Nebenbedingungen die beste (optimale) Lösung zu finden. Dabei sind die Nebenbedingungen durch ein System von linearen Ungleichungen formuliert. Bei zwei Variablen legen diese ein sogenanntes Planungspolygon fest. Gesucht ist nun in diesem Planungspolygon der Punkt, für den die sogenannte lineare Zielfunktion einen extremalen Wert d.h. ein Minimum oder Maximum annimmt.
Bei mehr als zwei Variablen kann die Lösung mit dem sogenannten Simplexalgorithmus gefunden werden.

Beispiele:
Eine Firma stellt zwei Modelle G_1 und G_2 eines Gerätes her, von denen jedes aus drei Teilen besteht. Diese werden von drei Automaten A_1, A_2, A_3 angefertigt. In der Tabelle ist angegeben, wie viele Minuten jeder Automat zu dem betreffenden Teilstück benötigt. Die Automaten können täglich höchstens 6 Stunden benutzt werden. Wieviele Exemplare von G_1 und G_2 wird man täglich herstellen, wenn der Gewinn je Stück 3 Fr. bei G_1 und 4 Fr. bei G_2 beträgt und der Gesamtgewinn möglichst gross sein soll?

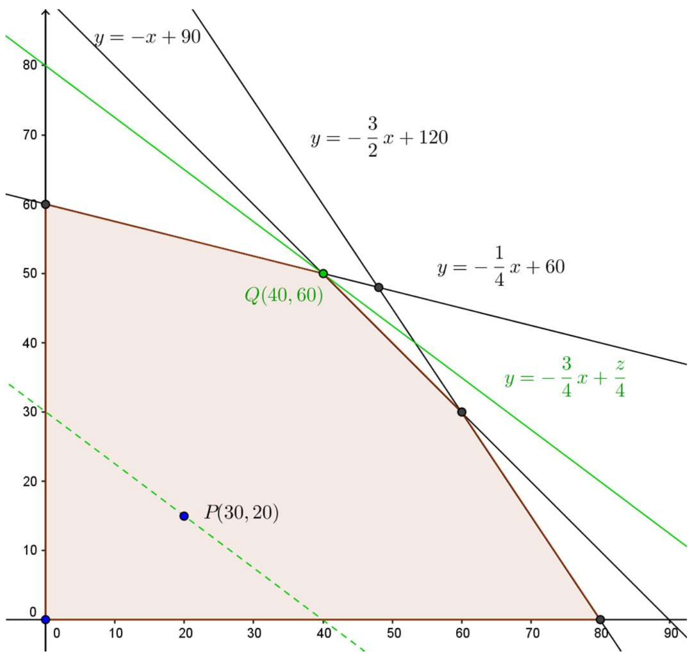
Automat	Benötigte Zeit in Minuten	
	G_1	G_2
A_1	4.5	3
A_2	4	4
A_3	1.5	6

Der Gewinn z der maximal werden soll, heisst Zielgrösse. Werden x Geräte von G_1 und y Geräte von G_2 hergestellt, so gilt:

$z = 3x + 4y$ soll maximal werden.

Durch die Produktionsbedingungen sind folgende Nebenbedingungen festgelegt:

$$\left|\begin{array}{r} 4.5x+3y\le 360 \\ 4x+4y\le 360 \\ 1.5x+6y\le 360 \end{array}\right| \text{ oder } \left|\begin{array}{c} y\le -\tfrac{3}{2}x+120 \\ y\le -x+90 \\ y\le -\tfrac{1}{4}x+60 \end{array}\right|$$



Wählt man einen Punkt im Lösungsgebiet z.B. x = 30 und y = 20 so erhält man den zugehörigen Gewinn
$z = 3\cdot 30 + 4\cdot = 170$.
Die Punkte P(x, y) die einen vorgegebenen Gewinn z ergeben, liegen auf einer Geraden mit der Gleichung
$z = 3x + 4y$ bzw. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}z$
Punkte mit gleichem Gewinn liegen also auf parallelen Geraden mit der Steigung $-\frac{3}{4}$ und dem y-Achsenabschnitt $\frac{1}{4}z$.

Lösung:
Der grösste Gewinn ergibt sich für diejenige Gerade, deren y-Achsenabschnitt möglichst gross ist. Dies ist im Schnittpunkt der Geraden $y = -x + 90$ und $y = -\frac{1}{4}x + 60$ der Fall.
Der maximale Gewinn wird erzielt, wenn 40 Stück von G_1 und 50 Stück von G_2 hergestellt werden. Er beträgt $z = 3 \cdot 40 + 4 \cdot 50 = 320$ Fr. Der Automat A_1 wird 330 Minuten beansprucht, die Automaten A_2 und A_3 sind ausgelastet.

Ein Minimumproblem:
Zur Erhaltung seiner Gesundheit benötigt der Mensch wöchentlich mindestens 100 mg Vitamin H und 150 Vitamin B. In der Apotheke gibt es Tabletten, von denen die eine 10 mg Vitamin H und 30 mg Vitamin B pro Gramm enthält, die andere 20 mg Vitamin H und 10 mg Vitamin B pro Gramm. Die erste Sorte kostet 1.25 Franken pro Gramm, die zweite Sorte 1.00 Fr. pro Gramm. Wie viele Tabletten von jeder Sorte wären wöchentlich nötig, um den Bedarf auf diese Weise mit möglichst geringen Kosten zu decken, und wie gross sind die wöchentlichen Kosten?

Sei x die Anzahl Gramm Tablette 1. Sorte, y Anzahl Gramm Tabletten 2. Sorte.

1. Zielfunktion:
Wird der Bedarf mit x Tabletten der 1. Sorte und y Tabletten der 2. Sorte gedeckt, dann betragen die Ausgaben
$z = \frac{5}{4}x + y$
z soll minimal werden.

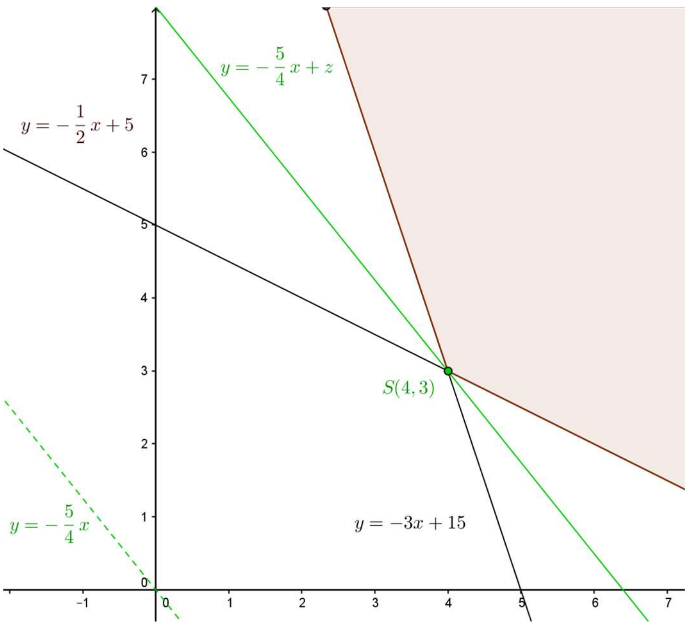
2. Der Minimalbedarf legt die Nebenbedingungen fest:

1: $10x + 20y \geq 0$ $\qquad y \geq -\frac{1}{2}x + 5$

2: $30x + 10y \geq 150$ $\qquad y \geq -3x + 15$

3: $x \geq 0$

4: $y \geq 0$



Punkte, die gleichen Kosten entsprechen liegen auf der Geraden mit der Gleichung
$y = -\frac{5}{4}x + z$
Den minimalen Kosten entspricht diejenige Gerade mit minimalem y-Achsenabschnitt
Diese trifft das Planungsgebiet im Schnittpunkt S(4, 3) der beiden Geraden
$y = -\frac{1}{2}x + 5$ und $y = -3x + 15$

Lösung:
Der Bedarf kann mit 4 Tabletten der ersten Sorte und 3 Tabletten der 2. Sorte mit minimalen Kosten von 8.00 Fr. gedeckt werden.

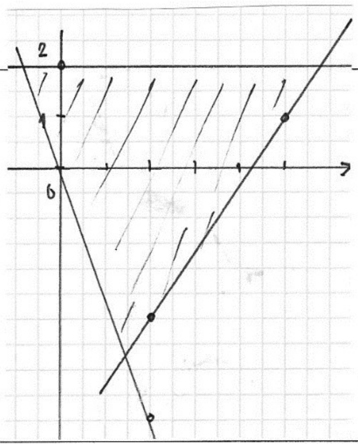
Weitere Beispiele: H. Deller u.a, Algebra Aufgaben Bd. 1, Orell Füssli

Akzentfach Mathematik 1ABCD 12.1.2007

Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.
Es ist auf Genauigkeit zu achten

1. (4 Punkte)
Schraffiere das durch das folgende Ungleichungssystem beschriebene Gebiet:

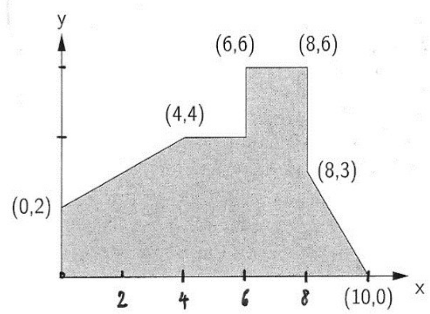
$$\left| \begin{array}{c} x \leq 3 \\ -1 \leq y \leq 2 \\ 3x - 2y \geq 3 \end{array} \right|$$



2. (4 Punkte)
Beschreibe die schraffierte Punktmenge mit Rand durch Ungleichungen in x und y:

a: Parallele zur x-Achse durch A(0/2)
b: Gerade durch die Punkte (0/0) und (2/-5)
c: Gerade durch die Punkte (2/-3) und (5/1)

3. (6 Punkte)-
Bei einer linearen Optimierung hat sich das abgebildete schraffierte Lösungsgebiet ergeben:
a) Zeichne die Gerade, für welche die Zielfunktion $z = x + y$ den Wert 6 annimmt.
b) In welchem Punkt des Lösungsgebiets ist die Zielfunktion $z = x + y$ maximal und wie gross ist dieser maximale Wert? (die zugehörige Gerade ist einzuzeichnen)
c) In welchem Punkt des Lösungsgebiets ist die (neue) Zielfunktion $z = x - y$ minimal und wie gross ist dieser minimale Wert? (die zugehörige Gerade ist einzuzeichnen)



4. (6 Punkte)

Ein Verein beschliesst, eine Ferienfahrt für Jugendliche zu organisieren. Die Fahrt soll mit Bussen durchgeführt werden. Der Bushalter hat 6 Kleinbusse für jeweils 20 Personen und 4 Normalbusse für jeweils 40 Personen. Für die Fahrt kann er höchstens 7 Chauffeure zur Verfügung stellen.
Die Kosten für einen Kleinbus betragen 500 Franken, für einen Normalbus 1500 Franken. Der Verein kann höchstens 6500 Franken für die Fahrkosten ausgeben.
Wieviele Klein- und Normalbusse muss der Verein mieten, damit möglichst viele Jugendliche an der Fahrt teilnehmen können ?

Zu zeichnen sind insbesondere das Lösungsgebiet und der Graph der Zielfunktion für ein vorgegebenes z.

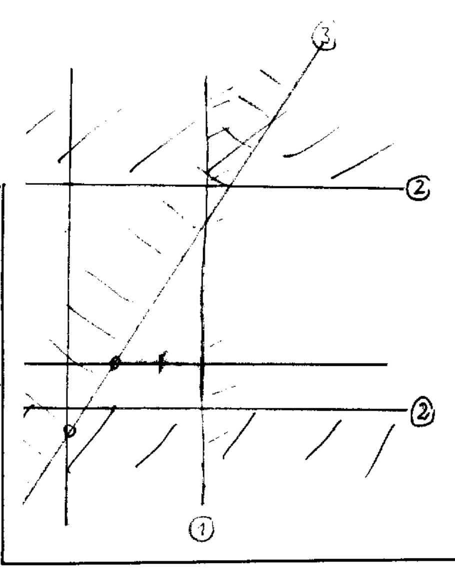
Falls Sie bei 4 scheitern, versuchen Sie die folgende Aufgabe zu lösen
E (3 Punkte)
Aus Zeitgründen sind nur die Zielfunktion und das Ungleichungssystem anzugeben:

**In einer kleinen italienischen Bildhauerwerkstatt werden Adonis- und Aphrodite-Statuen hergestellt. Drei Arbeitsgänge sind dabei nötig.
Massimo Forte bearbeitet die Steine, bis die groben Umrisse erkennbar sind. Er benötigt für jede Statue 4 Stunden. Er arbeitet höchstens 25 Stunden pro Woche.
Vinci da Raffael erarbeitet die himmlischen Gesichtszüge der Statuen. Er benötigt für den Adonis 3 Stunden und für die Aphrodite 5 Stunden. Er arbeitet höchstens 22.5 Stunden pro Woche.
Der grosse Künstler Milo Michelangelo vollendet die Bildhauerarbeit. Für den Adonis braucht er 6 Stunden, für die Aphrodite seiner grossen Hingabe an die weibliche Schönheit wegen 8 Stunden. Er arbeitet höchstens 40 Stunden pro Woche.
Die Adonisstatue erlaubt einen Gewinn von 0.7 Mio. Lire, die Aphroditestatue bringt 1 Mio. Lire. Wie viele Adonis- und Aphroditestatuen werden sie jede Woche herstellen, wenn sie einen möglichst hohen Gewinn erzielen wollen ?**

AMAT
19. 1. 07

1. ① $x \le 3$
② $-1 \le y \le 4$
③ $3x - 2y \ge 3$

$y = \frac{2}{3}x - 1$

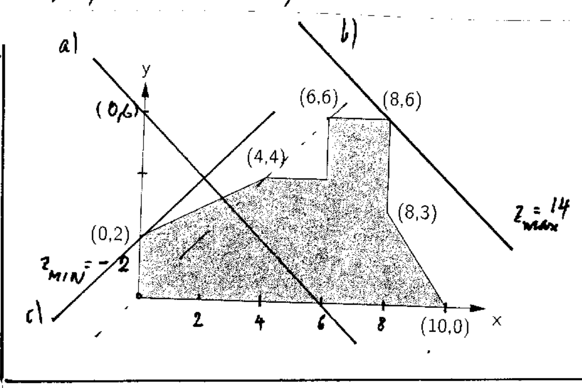


2. $y \le 2$
$y \ge -\frac{5}{2}x$
$y \ge \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$

3. a) $y = 6 - x$
GERADE DURCH (0,6) UND (6,0)

b) PARALLELE GERADE DURCH (8,6) $z = x + y = 14$

c) $y = x - z$ z MINIMAL WENN Y-ACHSENABSCHNITT MAXIMAL
PARALLELE GERADE DURCH (0,2) $z = x - y = 0 - 2$
MINIMALER WERT −2



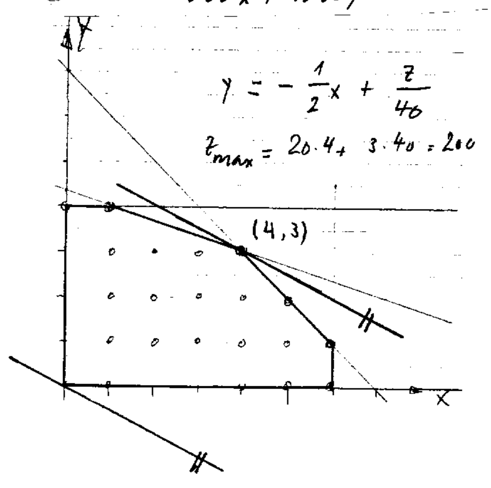
4. x KLEINBUSSE
y NORMALBUSSE

ZIELFUNKTION $z = 20x + 40y$ MAXIMAL

NEBENBED. $0 \le x \le 6$
$0 \le y \le 4$
$x + y \le 7$ ①
$500x + 1500y \le 6500$ 3zu $y \le -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$ ②

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{40}$

$z_{max} = 20 \cdot 4 + 3 \cdot 40 = 200$



$$\begin{array}{l|l}
① & y = 7 - x \quad (-1) \\
② & y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3} \quad +
\end{array}$$

$x = 4$
$y = 3$

5. x ADONIS y APHRODITE

GEWINN $z = 0.7x + y$ in 10^6 LIRE

NEBENBED. $4x + 4y \le 25$
$3x + 5y \le 22.5$
$6x + 8y \le 40$