1.4 Funktionen

Einleitung

Hermann Weyl (1885 – 1955): „Niemand kann erklären, was eine Funktion ist.“

Bei vielen Anwendungen in den Naturwissenschaften, der Wirtschaft oder im täglichen Leben hängt eine Grösse y von einer andern Grösse x ab. Man sagt in diesem Fall: y ist eine Funktion von x.

Beispiele:

a)
In eine kugelförmige Vase wird gleichmässig Wasser eingefüllt. Das Wasservolumen V ist eine Funktion der Füllhöhe h.
b)
Beim Stratosphärenflug 1935 mit einem Ballon wurden beim Aufstieg die folgenden Temperaturen. Die Temperatur in °C ist eine Funktion der Höhe h in m.

Höhe h in m	100	5000	10000	21000
Temperatur in °C	+18	-19	-31	-60

In vielen Fällen hängt eine Grösse von der Zeit ab.

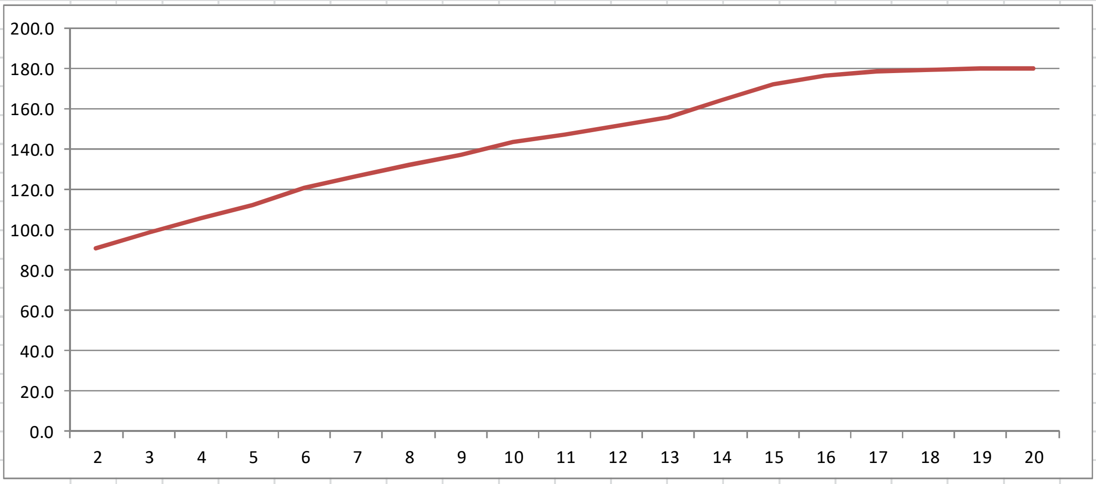
c)
Der Fahrtenschreiber eines bestimmten Trams gibt zu jeder Zeit die zugehörige Geschwindigkeit an. Die Geschwindigkeit v ist eine Funktion der Zeit t.
d)
Beim Fallschirmspringen ist bei einem bestimmten Sprung die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit
e)
Der Kurs y einer bestimmten Aktie in Fr. ist eine Funktion der Zeit.
f)
Bei einer PET-Flasche wird in der Nähe des Flaschenbodens ein kleines Loch gebohrt. Füllt man anschliessend die Flasche mit Wasser dann ist die Höhe des Wasserspiegels eine Funktion der Zeit.
g)
Die Fallhöhe eines Körpers im luftleeren Raum ist eine Funktion der Zeit (Fallgesetz).

Dazu ein kleines Experiment zur Bestimmung der Reaktionszeit einer Kandidatin:
Der Lehrer hält einen Massstab senkrecht. Die Kandidatin hält Daumen und Zeigefinger auf Höhe der Marke 0 cm ohne den Stab zu berühren. Sobald der Lehrer den Stab fallen lässt, versucht die Kandidatin ihn zu packen (den Massstab, nicht den Lehrer!). Aus der abgelesenen Fallhöhe kann die Reaktionszeit berechnet werden.
Bei einem bestimmten Versuch betrug die Fallhöhe: s = 0.18 m
Gemäss dem Fallgesetz gilt:
$s = 5t^2$
Daraus kann die Zeit t berechnet werden:
$t = \pm\sqrt{\frac{s}{5}}$ und damit im konkreten Fall als Reaktionszeit $t = \sqrt{\frac{0.18}{5}} \approx 0.19$ Sekunden

h)
Die Körperlänge eines bestimmten Kindes in cm ist eine Funktion des Alters.

Körperlänge eines Kindes

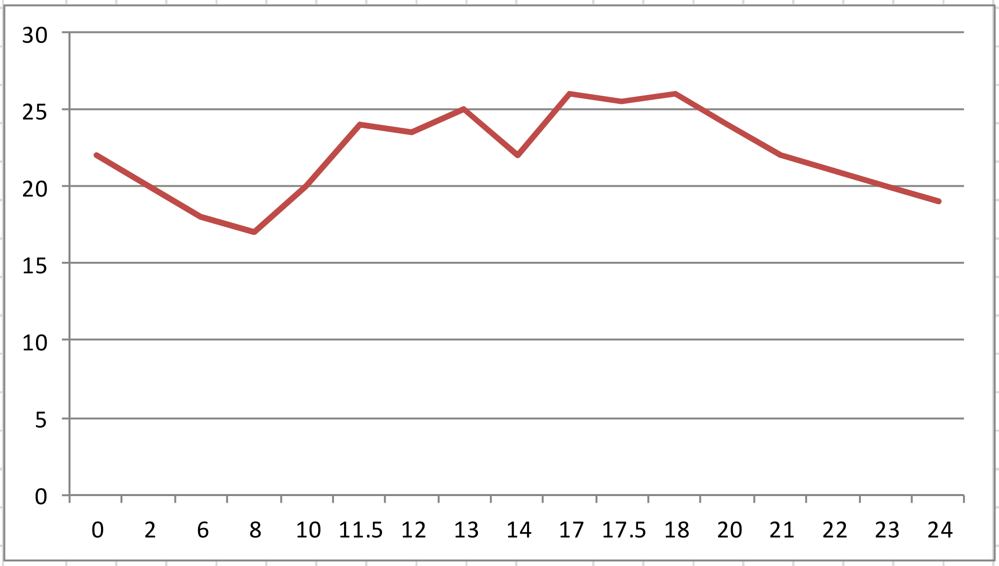
Alter	in Jahren	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Länge in cm		90.5	98.5	106.0	112.0	121.0	126.5	132.0	137.0	143.5	147.0	151.5	155.5	164.0	172.0	176.5	178.5	179.0	180.0	180.0



Mit Wachstumskurven kann beurteilt werden, ob die Entwicklung eine Kindes allenfalls auffällig ist.
i)
Die Tagestemperatur T in °C an einer Messstelle ist eine Funktion der Tageszeit t.

Temperatur an der Messstelle beim Bahnhof Zofingen 16./17.8.1988

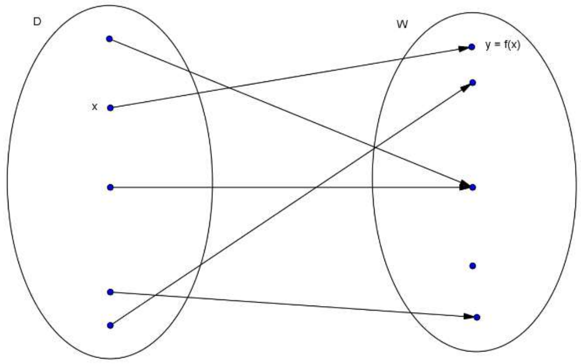
Zeit t	0	2	6	8	10	12	12	13	14	17	18	18	20	21	22	23	24
Temperatur T	22	20	18	17	20	24	24	25	22	26	26	26	24	22	21	20	19

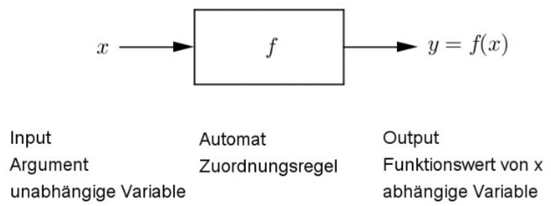


Nach diesen empirischen Funktionen folgen in den nächsten Abschnitten einige Beispiele von wichtigen mathematischen Funktionen.

1.5 Funktionsbegriff

In diesem und dem folgenden Abschnitt werden einige wichtige mathematische Funktionen besprochen.
Unter einer **Funktion f** verstehen wir eine Vorschrift, die jeder Zahl $x \in D_f \subset R$ eindeutig eine Zahl $y \in \mathbf{R}$ zuordnet. x heisst Original (Urbild), y heisst Funktionswert von x und wird mit f(x) bezeichnet. D_f heisst **Definitionsbereich** der Funktion f. Die Menge W_f der Funktionswerte von f heisst **Wertemenge**. y = f(x) heisst **Funktionsgleichung**.





Bemerkung:
Eine **Funktion** kann man sich als Automaten vorstellen, der aus einer Eingabe x (einem Input) eindeutig einen Output y erzeugt.

Die Menge der Punkte (x, y) mit $x \in D_f$ heisst **Graph G_f der Funktion**:
$G_f = \{ (x, y) / x \in D_f, y = f(x)\}$.

Formulierungsvariante:
Stellt man die Punkte (x, y), deren Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen, in einem Koordinatensystem dar, so erhält man den Graphen der Funktion.

Einige wichtige Beispiele von Funktionen:

Funktionsgleichung	Name der Funktion	Definitionsbereich	Graph
$f(x) = ax$	Proportionalität	R	Ursprungsgerade
$f(x) = ax + b$	lineare Funktion	R	Gerade
$f(x) = \frac{a}{x}$ $a \neq 0$	umgekehrte Prop.	$R\backslash\{0\}$	rechtw. Hyperbel
$f(x) = x^2$	Quadratfunktion	R	Ursprungsparabel
$f(x) = ax^2 + bx + c$	quadratische Funktion	R	Parabel
$f(x) = \lvert x \rvert$	Betragsfunktion	R	
$f(x) = \sqrt{x}$	Wurzelfunktion	R_0^+	

Bemerkung:
Die Eindeutigkeit der Zuordnung bedeutet, dass für jedes x des Definitionsbereichs der Graph der Funktion von einer Parallelen zur y-Achse in genau einem Punkt geschnitten wird.