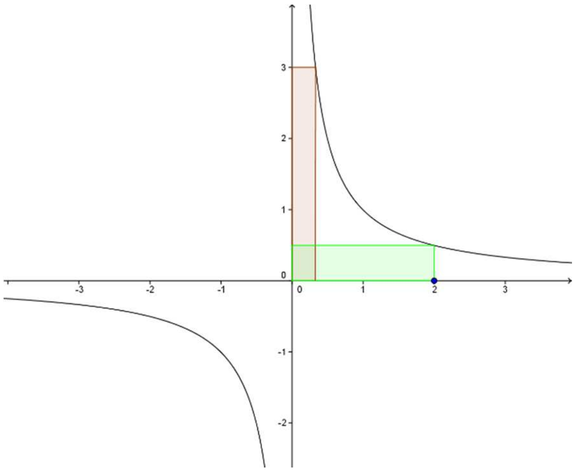
1.8. Die indirekte (umgekehrte) Proportionalität

Die Funktion $f : x \to y = \frac{a}{x}$ $\quad D_f = \boldsymbol{R}\backslash\{0\}\ a \neq 0$

heisst umgekehrte (indirekte) Proportionalität.

Spezialfall a = 1:

f: Bilde den Kehrwert der gegebenen Zahl.
An der Stelle x = 0 ist die Funktion nicht definiert.



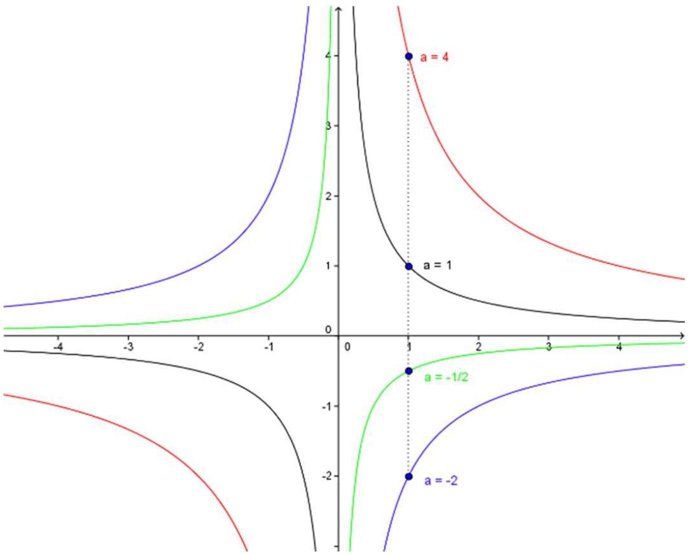
Der Graph heisst rechtwinklige **Hyperbel**.
Um etwa den Graphen zu zeichnen, bestimmt man an einigen Stellen x die Funktionswerte f(x) und verbindet die Punkte durch eine „schön geschwungene Linie".

Geometrische Interpretation der Funktionsgleichung:
Unabhängig von der Wahl des Hyperbelpunktes sind die entsprechenden achsenparallelen Rechtecke inhaltsgleich.

Die Hyperbeläste kommen den Koordinaten-achsen beliebig nahe. Sie sind **Asymptoten** der Hyperbel.

Da für alle $x \epsilon D_f$ gilt: f(-x) = - f(x) , d.h. die Funktionswerte sind an den entgegengesetzten Stellen x und -x entgegengesetzt gleich, ist die Hyperbel zentralsymmetrisch zum Ursprung (0, 0). Sie ist ausserdem axialsymmetrisch zu den Winkelhalbierenden.

Welchen Einfluss hat der Parameter a?
Skizze mit a= 1, 4, -2, $-\frac{1}{2}$
Die bisherigen Funktionswerte werden mit a multipliziert. Dies bewirkt eine Dehnung bzw. Pressung der Kurve in y-Richtung. Ist a < 0, so kommt eine Spiegelung an der x-Achse dazu.
Diese Abbildung heisst normale Affinität bezüglich der x-Achse.



Bemerkung:
Asymptote (griech. nicht zusammen-fallen)

Unterscheide:

Proportionalität:

y und x sind quotientengleich $\frac{y}{x} = a$

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	30	60	120	240	480

$f : x \rightarrow y = 60 \cdot x$

Der Graph von f ist eine Ursprungsgerade

indirekte Proportionalität:

y und x sind produktgleich x y = a

geometrisch: flächengleiche Rechtecke

$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
120	60	30	15	$\frac{15}{2}$

$f : x \rightarrow y = \frac{60}{x}$

Der Graph von f ist eine Hyperbel

Beispiele:

Erreicht man bei einer Wanderung eine mittlere Geschwindigkeit von 4.2 km/h, dann ist der zurückgelegte Weg s (in km) proportional zur Zeit t (in Stunden): $s = 4.2 \cdot t$

Die Dauer t (in Stunden) eines Fussmarschs von 20 km ist umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit v (in km/h):

$t = \frac{20}{v}$

Aufgabe:

Bestimme den Parameter a so, dass die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{a}{x}$ durch den Punkt P(2, 3) geht.

Die Koordinaten von P erfüllen die Hyperbelgleichung:

$3 = \frac{a}{2}$ und damit a = 6.

1.9. Quadratische Funktionen

Funktionen mit der Gleichung

$f: x \rightarrow y = ax^2 + bx + c \qquad a, b, c \in R, a \neq 0 \qquad D_f = R$

heissen quadratische Funktionen. Der Graph einer quadratischen Funktion heisst Parabel.

Spezialfall:

Die Quadratfunktion $f: x \rightarrow y = x^2$

f: quadriere die gegebene Zahl

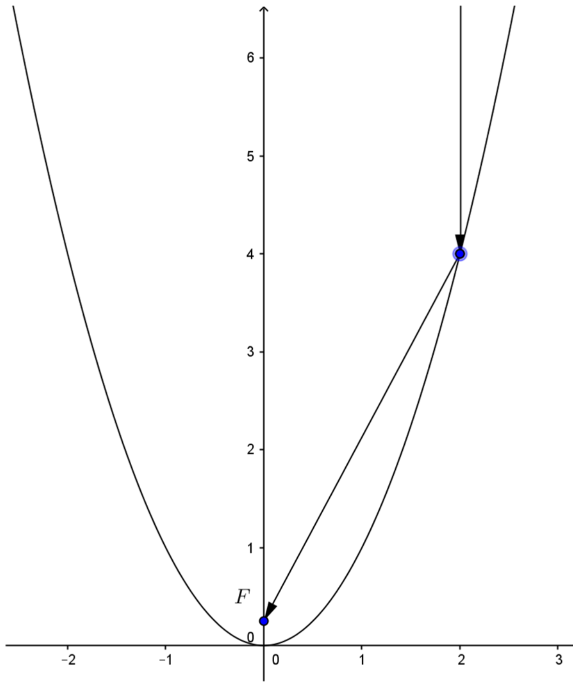
Der Funktionswert an der Stelle 2 ist 4 oder kurz: f(2) = 4

Es gilt: f(2) = f(-2) = 4 oder allgemein

f(-x) = f(x) für alle $x \in D_f = R$.

Der Graph der Funktion, die Normalparabel, ist symmetrisch zur y-Achse.

An der Stelle x = 0 berührt die Parabel die x-Achse, die x-Achse ist also Tangente an die Parabel. Dieser Punkt heisst Scheitel der Parabel.



Eine Anwendung der Parabeleigenschaften in der Praxis:

Achsenparallele Lichtstrahlen werden bei Reflexion an einem parabolförmigen Spiegel im Brennpunkt F gesammelt (Parabolspiegel, -antenne).

Aufgabe :

Zeichne den Graphen der Funktion . $f: x \rightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + 2x - 3 \qquad$ für -1 ≤ x ≤ 7

und bestimme geometrisch die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse

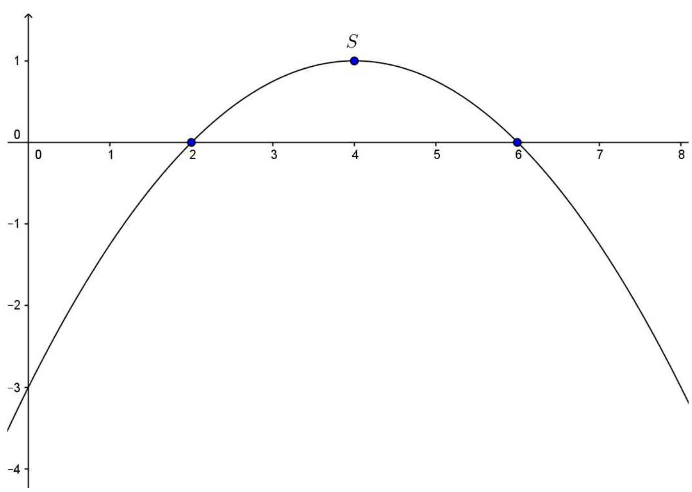
Dazu werden an einigen Stellen die Funktionswerte bestimmt:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	$-\frac{21}{4}$	-3	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$

Die abgebildete Parabel ist nach unten geöffnet. An der Stelle x = 4 ist die Parabeltangente horizontal, der zugehörige Parabelpunkt S(4, 2) heisst Scheitel der Parabel.

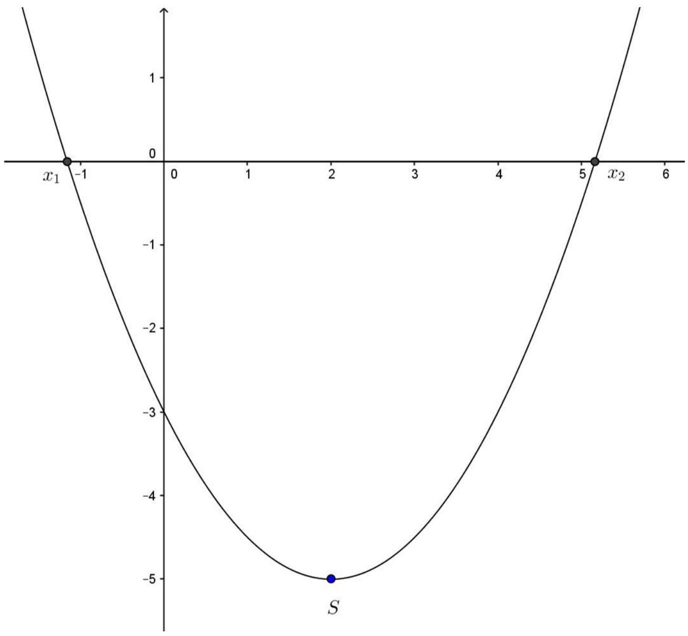
Die Parabel schneidet die x-Achse an den Stellen x = 2 und x = 6. Damit ist die quadratische Gleichung

$-\frac{1}{4} \cdot x^2 + 2x - 3 = 0$ auf graphischem Weg gelöst. Ein rechnerischer Weg ergibt sich später mit der quadratischen Auflösungsformel.



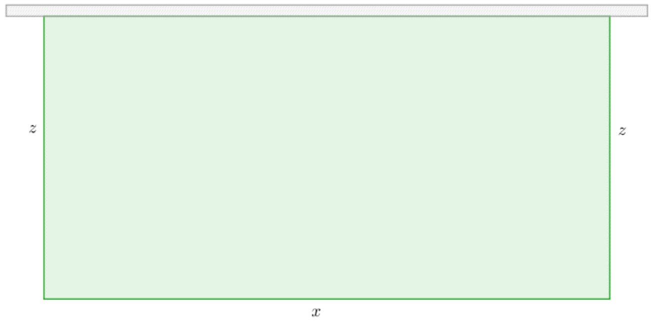
Übungsaufgabe:
Zeichne den Graphen der Funktion f: $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2x - 3$ und bestimme geometrisch die x-Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse.

Lösung:
Der Graph ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel S(2, -5). Sie schneidet die x-Achse an den Stellen $x_1 \approx -1.2$ und $x_2 \approx 5.3$, d.h. die quadratische Gleichung $\frac{1}{2} \cdot x^2 - 2x - 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 \approx 1.2$ und $x_2 \approx 5.3$. Da an diesen Stellen der Funktionswert 0 ist, sagt man auch x_1 und x_2 sind die Null-stellen der Funktion $f: x \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2x - 3$.



Anwendung: Ein Extremalproblem

Aufgabe.
Wie sind die Seiten eines an einer Hauswand angrenzenden rechteckigen Zauns zu wählen, wenn dazu ein 30 m langes Drahtgeflecht zur Verfügung steht und die Rechtecksfläche möglichst gross sein soll?

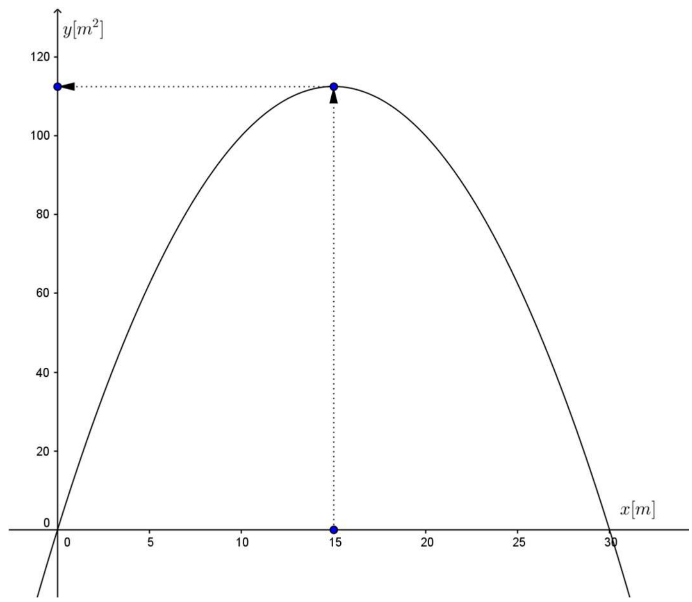


1. Zielfunktion:
Die Rechtecksfläche y = xz soll maximal sein

2. Nebenbedingung:
Zaunlänge $x + 2z = 30$ oder
$z = 15 - \frac{1}{2} \cdot x$

3. Zielfunktion Rechtecksfläche
$f: x \to y = x \cdot (15 - \frac{1}{2} x)$

4. Der Graph ist eine nach unten geöffnete quadratische Parabel. Sie schneidet die x-Achse an den Stellen 0 und 30. Damit liegt der Scheitel aus Symmetriegründen in der Mitte bei x = 15. Also ist für die Länge x = 15 m die Rechtecksfläche maximal. Die maximale Rechteckfläche erhält man zu $f(15) = \frac{225}{2}$



Bemerkung:
Das Resultat ist plausibel. Betrachtet man zusätzlich, das an der Hauswand gespiegelte Rechteck, dann hat bekanntlich unter allen Rechtecken das Quadrat maximalen Flächeninhalt.

Soll das Drahtgeflecht ohne einschränkende Bedingungen den grösstmöglichen Flächeninhalt umfassen, dann ist es zu einem Kreis zu formen.

1.10. Weitere Funktionen

Die Betragsfunktion (Schönfarber-, Vorzeichenfresser-)

Einführendes Beispiel:
Die Zahlen -2 und 2 haben auf der Zahlengeraden von 0 denselben Abstand. Wir sagen -2 und 2 haben denselben absoluten Betrag und schreiben dafür |-2| = |2| = 2.

Allgemein:

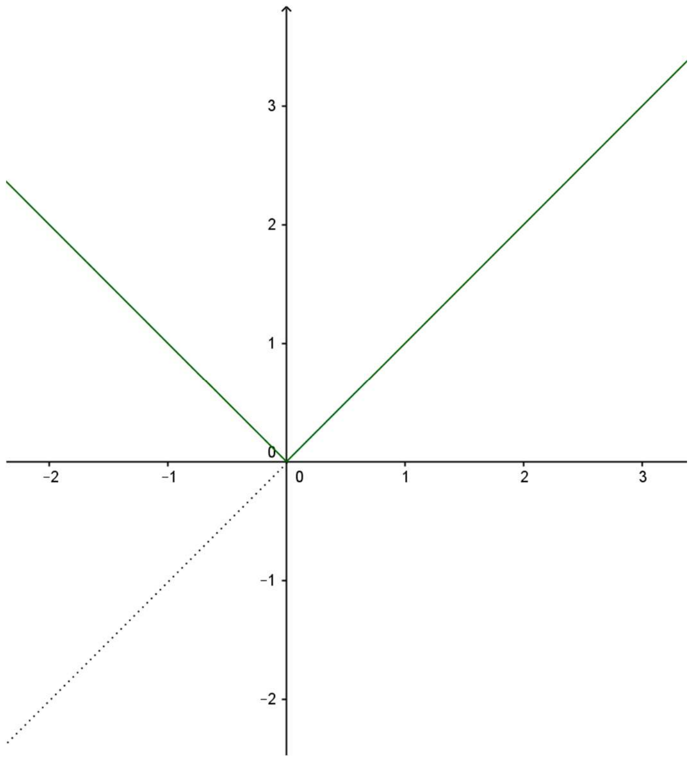
Def. $|a| = \begin{cases} a & a < 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

Der absolute Betrag einer Zahl ist eine nichtnegative Zahl.

Bemerkung:

Die Betragsfunktion nimmt keine negativen Funktionswerte an. Sie verändert positive Zahlen und die Zahl 0 nicht, wechselt aber bei negativen Zahlen das Vorzeichen. Der Graph der Betragsfunktion kann gezeichnet werden, indem man zunächst die Gerade y = x darstellt und anschliessend die unterhalb der x-Achse liegenden Punkte an der x-Achse spiegelt.

Der Graph der Betragsfunktion



Bemerkung:
Es gilt z.B. $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ oder allgemein:

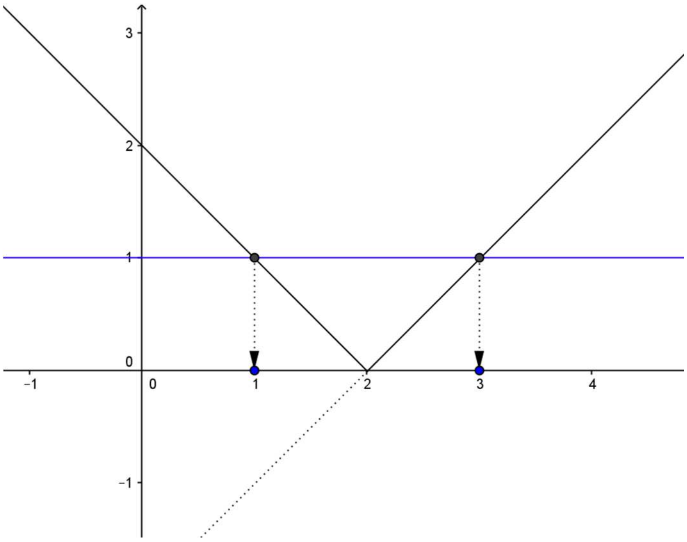
$\sqrt{a^2} = |a|$

Aufgabe:
Löse die folgenden Gleichungen:

a) $x = \|5\|$	x = 5
b) $\|x\| = -5$	keine Lösung
c) $\|x\| = 5$	x = 5 oder x = -5
d) $\|x\| \leq 5$	Gesucht sind die Punkte, deren Abstand von 0 kleiner oder gleich 5 ist Lösung: -5 ≤ x ≤ 5
e) 1 < |x| < 3	[1,3] ∪ [-3,-1]

Aufgabe:
Zeichne den Graphen der Funktion
$f: x \rightarrow y = |x-2|$

Zeichne zunächst den Graphen der Funktion
$f: x \rightarrow y = x-2$
Das Betragszeichen bewirkt, dass Punkte unterhalb der x-Achse an der x-Achse gespiegelt werden.



Bemerkung:
Die Ersetzung von x durch x – 2 bewirkt eine Translation des Graphen in x-Richtung um 2 Einheiten.

Zeichnet man zusätzlich zum Graphen die Gerade y = 1, dann können die folgenden Gleichungen grafisch gelöst werden:

$\|x - 2\| = 1$	Lösung: x = 1 oder x = 3
$\|x - 2\| < 1$	Lösung: L =]1, 3[
$\|x - 2\| > 1$	Lösung: L =]-∞, 1[∪]3, ∞[

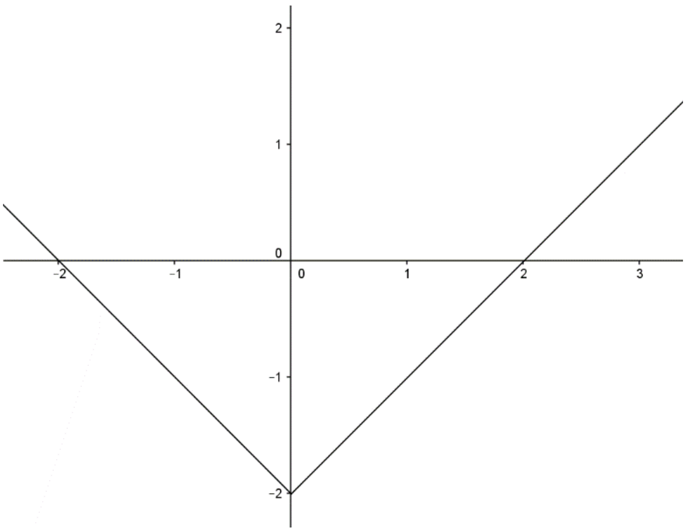
Allgemein gibt |x - a| den Abstand der Zahl x zu a an.

Aufgabe:
Zeichne den Graphen der folgenden Funktionen:

a) $f: x \rightarrow y = |x| - 2$

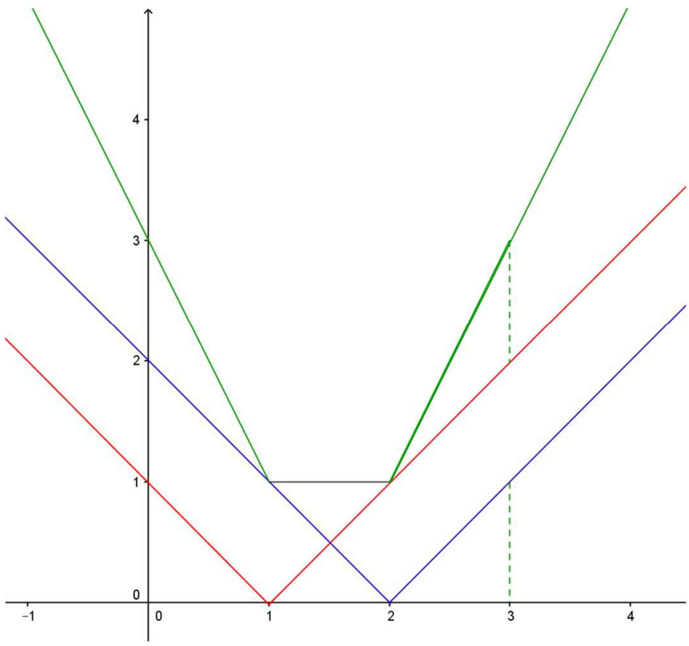
b) $f: x \rightarrow y = |x-1| + |x-2|$

Lösung von a)
Bemerkung:
Der Summand –2 bewirkt eine Verschiebung des Graphen um 2 Einheiten in negativer y-Richtung



Lösung von b)

$f : x \to y = |x-1| + |x-2|$ |



Fallunterscheidung:

$x \leq 1$ $\quad$ $f(x) = 1 - x + 2 - x = 3 - 2x$

$1 < x < 2$ $\quad$ $f(x) = x - 1 + 2 - x = 1$

$x \geq 2$ $\quad$ $f(x) = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

Der Graph kann auch durch Superposition der beiden Summanden gezeichnet werden.

Aufgabe

Löse die folgende Gleichung: $|x| - 1 = |2x - 5|$

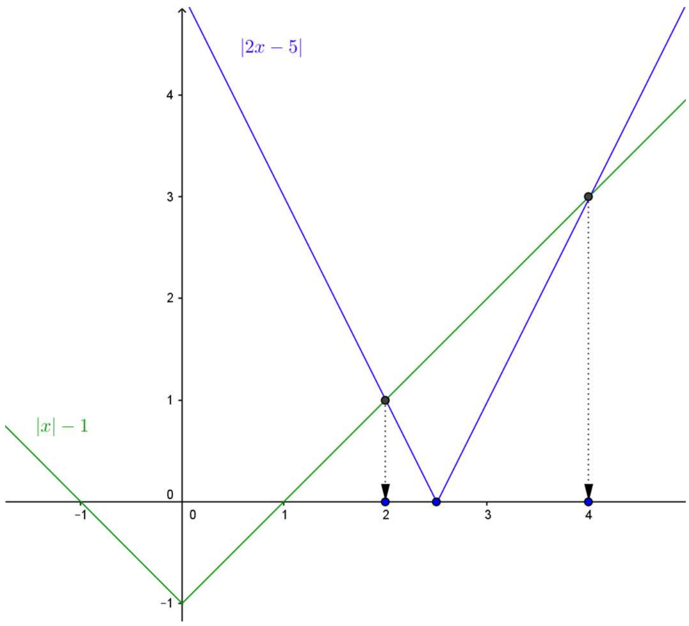
Lösung durch Fallunterscheidung:

$x < 0$ $\quad$ $-x - 1 = 5 - 2x$ $\quad$ $(x = 6)$

$0 \leq x \leq \frac{5}{2}$ $\quad$ $x - 1 = 5 - 2x$ $\quad$ $x = 2$

$x > {}^5/_2$ $\quad$ $x - 1 = 2x - 5$ $\quad$ $x = 4$

Lösungsmenge L = {2, 4}



Grafische Lösung:
In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen

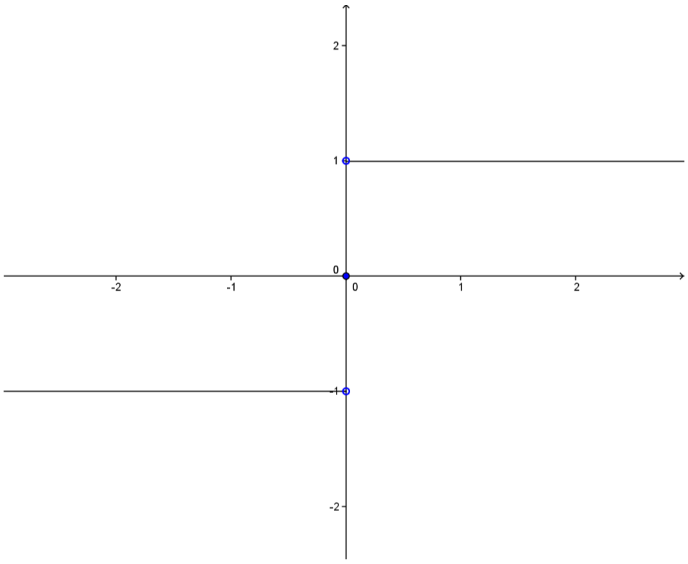
$f : x \to y = |x| - 1$ bzw.

$f : x \to y = |2x - 5|$

dargestellt. Die x-Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind die beiden Lösungen der Gleichung.

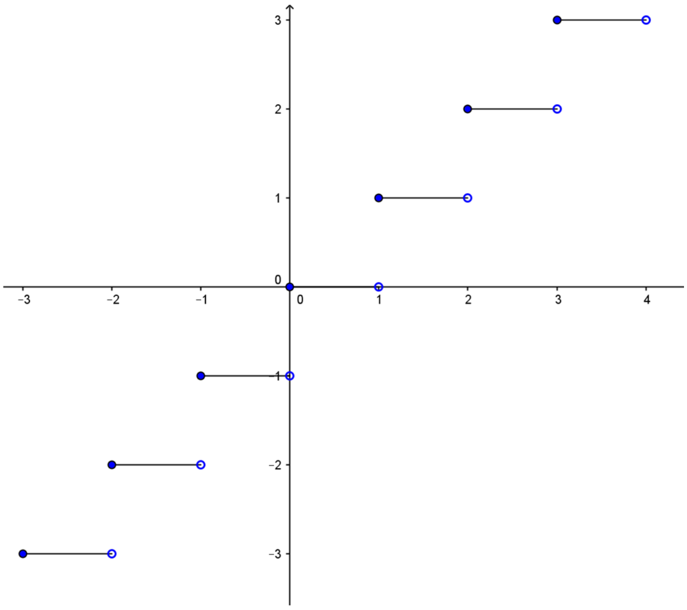
Die Vorzeichenfunktion (Signumfunktion)

$$f: x \rightarrow y = sign\, x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Die Gauss'sche Klammerfunktion (Integerfunktion, grösste ganze Zahl ≤ x)

$f: x \rightarrow y = \mathrm{int}(x) = [x]$



Beispiel einer Funktion, deren Graph nicht gezeichnet werden kann:

$$f: x \rightarrow y = \begin{cases} 1 & x\ rational \\ -1 & x\ irrational \end{cases}$$