1.6 **Direkte, indirekte Proportionalität**

Beispiel :

x	$1 \xrightarrow{+1}$	$2 \xrightarrow{+1}$	3	4	6	8	12
y	$20 \xrightarrow{+20}$	$40 \xrightarrow{+20}$	60	80	120	160	240

Funktionsgleichung : $f : x \rightarrow y = 20x$

Allgemein:
(Direkte) Proportionalität $f : x \rightarrow y = m \cdot x$ m $\in$ **R,** m $\neq 0$

f : Funktionsvorschrift: „multipliziere mit m"
x : Eingabegrösse, Input, Argument
y: Ausgabegrösse, Output, Funktionswert

y ist proportional zu x bedeutet also, dass der Quotient von y und x den festen Wert m hat (d.h. **y und x sind quotientengleich**). Der Funktionswert wird also erhalten, indem man x mit der festen Zahl m multipliziert. Bei einer direkten Proportionalität bewirkt eine Verdopplung von x eine Verdopplung des Funktionswerts y.

Beispiel:

x	$1 \xrightarrow{\cdot 2}$	$2 \longrightarrow$	3	4	6	8	12
y	$240 \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}}$	$120 \longrightarrow$	80	60	40	30	20

Funktionsgleichung : $f : x \rightarrow y = \dfrac{240}{x}$ x $\neq 0$

Allgemein:
Im Gegensatz zur direkten Proportionalität hat bei einer indirekten Proportionalität das Produkt von x und y einen festen Wert a, d.h. es gilt:

Indirekte Proportionalität: $f : x \rightarrow y = \dfrac{a}{x}$ x $\neq 0$.

Eine Verdopplung von x bewirkt eine Halbierung des Funktionswerts.

Beispiele:

a) Wechselkurse (2021)
1 Euro kostet 1.21 CHF, also kosten x Euro y CHF. $f : x \rightarrow y = 1.21 \cdot x$
1 britisches Pfund GBP kostet 1.46 CHF, also kosten x GBP y CHF. $f : x \rightarrow y = 1.46 \cdot x$

b) Gleichförmige Bewegung
Der zurückgelegte Weg s ist proportional zur Zeit t.
Mit einer Geschwindigkeit 60 km/h legt man in t h die Strecke s = 60·t km zurück.
$f : t \rightarrow s = 60 \cdot x$

c) Zins
Ein Kapital von Fr. 1000.- bringt in x Tagen (x < 360) bei einem Zinssatz von 1.5%
einen Zins von $1000\frac{15}{1000}\cdot\frac{1}{360}\cdot x=\frac{15}{360}\cdot x=\frac{1}{24}\cdot x$ Fr. Zins.
$f:x\rightarrow y=\frac{15}{3600}\cdot x$

d) Energietarif (Olten: Stand 2012)
Die Energiekosten in Fr. sind proportional zum Verbrauch in kWh
Hochtarif 0.233 Fr./kWh x kWh kosten y = 0.233·x Fr.
$f:x\rightarrow y=0.233\cdot x$
Niedertarif 0.128 Fr./kWh x kWh kosten y = 0.128·x Fr.
$f:x\rightarrow y=0.128\cdot x$

e) Kosten des Helikopters „Superpuma“ (Firma Helog, Stand November 2000).
Die Flugminute kostet Fr. 152.-
Die Kosten y in Fr. für t Minuten sind proportional zu t: y = 152·t
$f:t\rightarrow y=152\cdot t$

Eine Anwendung der direkten Proportionalität in der Physik:
Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so erfährt er eine Beschleunigung. Ändert man die Kraft, so ändert sich mit ihr die Beschleunigung. Das Experiment zeigt, dass die Kraft zur Beschleunigung a proportional ist. Es zeigt sich ebenfalls, dass die Kraft zur Masse m proportional ist. Damit muss die Kraft zum Produkt von Masse und Beschleunigung proportional sein, d.h. es gilt: F = c·m·a. Die Konstante c ist vom Masssystem abhängig.
Die Einheit Newton wird definiert, indem man die Masse in kg und die Beschleunigung in ms^{-2} misst und die Konstante c = 1 wählt.

Allgemein:
Ist eine Grösse z sowohl zur Grösse x als auch zur Grösse y proportional, dann ist z auch zum Produkt xy der beiden Grössen proportional, d.h. es gilt:
$\mathrm{z}=\mathrm{k}\cdot\mathrm{xy}$
mit einem Proportionalitätsfaktor k, der von x und y unabhängig ist.

In den folgenden Beispielen ist y umgekehrt proportional zu x.

f)
Ein Sackgeld von Fr. 60.- reicht für y Tage, wenn pro Tag x Fr. ausgegeben werden.
$y=\dfrac{60}{x}$ y ist umgekehrt proportional zu x.

$f:x\rightarrow y=\dfrac{60}{x}$ $x\neq 0$

g) Gleichförmige Bewegung
Ein Radfahrer legt mit einer Geschwindigkeit von 25 km/h eine Strecke s in drei Stunden zurück. Erreicht er die Geschwindigkeit v km/h, so benötigt er für die gleiche Strecke die Zeit t.

$t = \frac{75}{v}$ Die benötigte Zeit t ist also umgekehrt proportional zu v

$f : v \to t = \frac{75}{v}$ $v \neq 0$

In Anwendungen ist es wichtig zu erkennen, ob zwei Grössen proportional sind oder nicht.

Aufgabe:
Wenn 2 Schneepflüge in 3 Stunden 12 Kilometer einer 4 m breiten Strasse vom Schnee befreien können, wie viel Zeit brauchen dann 10 Schneepflüge für einen Kilometer einer 12 m breiten Strasse?

Die benötigte Zeit t [h] ist proportional zur Länge *l* [km] der Strasse und zur Breite b [m] und umgekehrt proportional zur Anzahl n der Schneepflüge.
dh. es gilt

$$t = c \cdot \frac{l \cdot b}{n}$$

Die Konstante c ist durch die Angaben bestimmt:

$3 = c \cdot \frac{12 \cdot 4}{2} = 24c$ und damit $\frac{1}{8}$

Damit gilt:

$$t = \frac{1}{8} \cdot \frac{l \cdot b}{n} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 12}{10} = \frac{3}{20} = \frac{9}{60}$$

Sie benötigen also 9 Minuten.

Übungsaufgabe (☺):
Wenn eineinhalb Hennen in eineinhalb Tagen eineinhalb Eier legen, wie viele Hennen braucht man dann, damit in sechs Tagen sechs Eier gelegt werden?

Die Anzahl e der Eier ist proportional zur Anzahl t der Tage und zur Anzahl h der Hennen
dh. es gilt

$$e = c \cdot t \cdot h$$

Die Konstante c ist durch die Angaben bestimmt:

$\frac{3}{2} = c \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$ und damit $\frac{2}{3}$

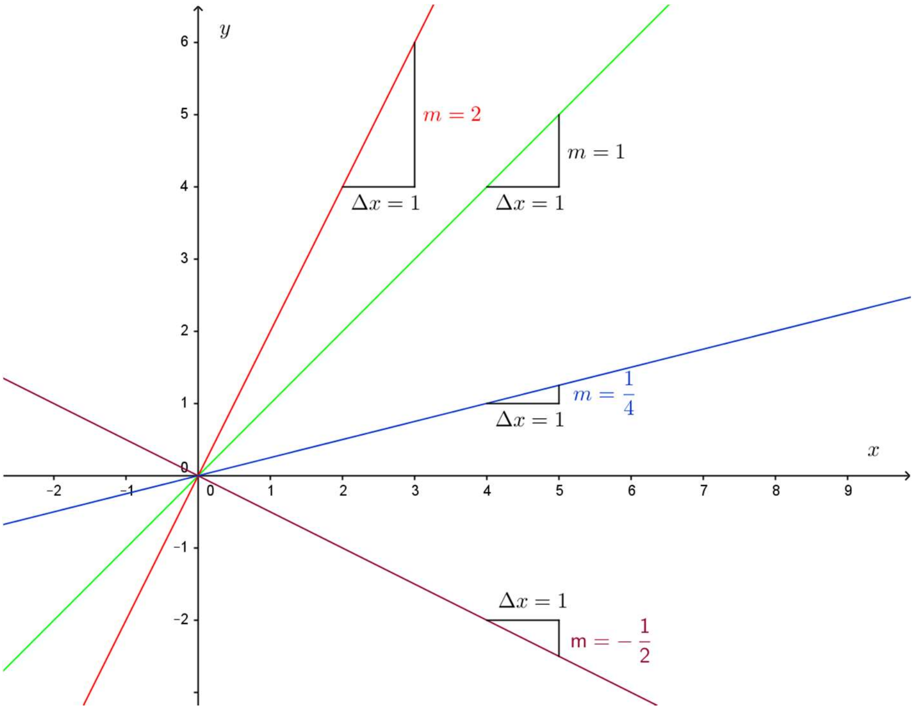
Damit gilt:

$e = \frac{2}{3} \cdot t \cdot h$ oder $h = \frac{3e}{2t} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 6} = \frac{3}{2}$

Es legen also $\frac{3}{2}$ Hennen in sechs Tagen sechs Eier.

Stellt man die Punkte (x, y), deren Koordinaten die Funktionsgleichung einer direkten Proportionalität erfüllen in einem Koordinatensystem dar, so erhält man den Graphen der Funktion.

Aufgabe:
In einem Koordinatensystem sind die Punkte darzustellen, deren Koordinaten die Gleichung $f: x \to y = m \cdot x$ $m \in \mathbf{R}$ erfüllen. Gewählte Parameterwerte m = 1, 2, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$,.



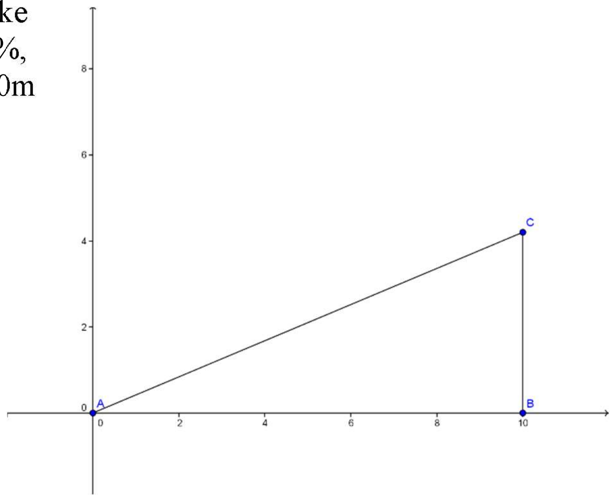
$$
\begin{array}{lllllll}
x & -2 \xrightarrow{+1} & -1 \xrightarrow{+1} & 0 \xrightarrow{+1} & 1 \xrightarrow{+1} & 2 \xrightarrow{+1} & 3 \\
y & -2m \xrightarrow{+m} & -m \xrightarrow{+m} & 0 \xrightarrow{+m} & m \xrightarrow{+m} & 2m \xrightarrow{+m} & 3m
\end{array}
$$

Die Wertetabelle zeigt: Wenn x um 1 wächst, so verändert sich y gerade um m.

> Satz:
> Der Graph der direkten Proportionalität $f: x \to y = m \cdot x$ $m \in \mathbf{R}$, ist eine Ursprungsgerade. Sie geht ausserdem durch den Punkt P(1, m). m heisst Steigung der Geraden.
> Ist m > 0, dann steigt die Gerade, für m < 0 fällt sie. Für m = 0 erhält man y = 0, die Gleichung der x-Achse.

Bemerkung:
Die Steigung einer Geraden gibt die Veränderung von y an, wenn x um 1 wächst.
Bei Verkehrszeichen wird die Steigung in % angegeben

Die Pilatusbahn - die steilste Eisenbahnstrecke der Welt - hat eine mittlere Steigung von 42%, das heisst auf eine Horizontaldistanz von 100m steigt sie im Mittel $\frac{42}{100} \cdot 100 = 42$m.



Aufgabe:
Die Talstation der Jungfraubahn auf der Kleinen Scheidegg liegt auf der Höhe 2060 m.ü.M., die Bergstation auf dem Jungfraujoch auf 3450 m.ü.M. Die horizontal gemessene Distanz zwischen der Kleinen Scheidegg und dem Jungfraujoch beträgt 9.2 km. Welche Steigung hat damit die Jungfraubahn?

$\frac{Höhendifferenz}{Horizontaldistanz} = \frac{3450-2060}{9200} = \frac{1390}{9200} \approx \frac{15}{100}$ also ungefähr 15%.

Aufgabe:
Gegeben ist die direkte Proportionalität mit der Gleichung $f: x \to y = \frac{3}{4} \cdot x$

a) gesucht ist f(100) $\quad f(100) = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75$

b) für welches x gilt f(x) = -210? $\quad f(x) = \frac{3}{4} \cdot x = -210 \quad$ x = - 280

Wird bei dieser Aufgabe der geometrische Aspekt betont, so wird das Problem folgendermassen formuliert:
Die Punkte P(100, y) bzw. Q(x, -210) liegen auf der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x$. Welchen Wert haben die fehlenden Koordinaten.

Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung

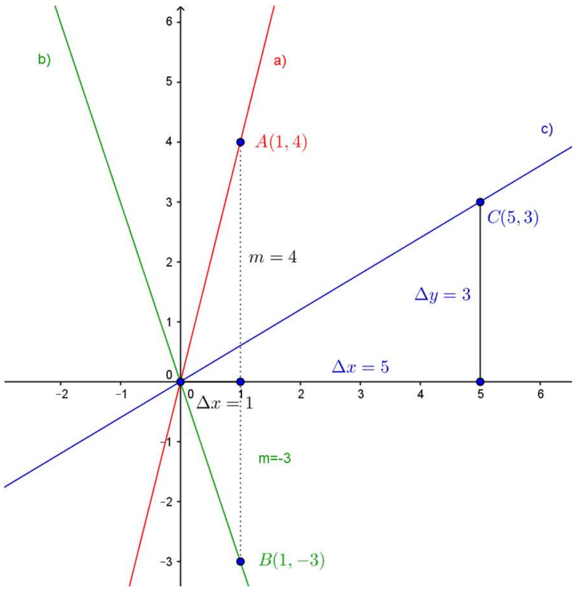
P(100, y) $\quad y = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75$

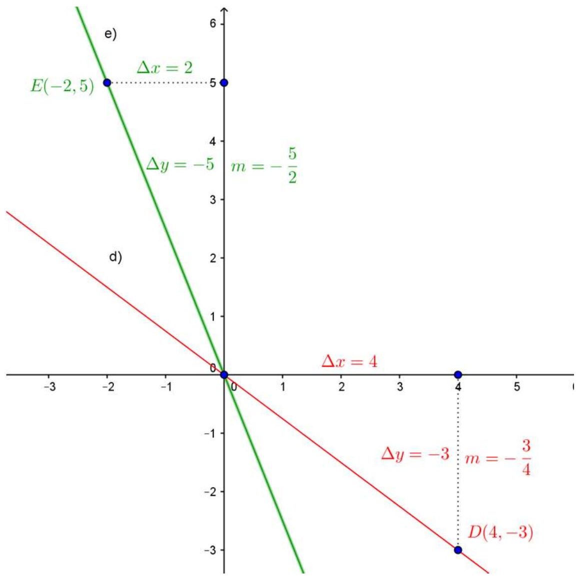
Q(x, -210) $\quad -210 = \frac{3}{4} \cdot x \quad$ x = -280

Umgekehrt kann jede Ursprungsgerade ausser der y-Achse durch eine Gleichung der Form $y = mx$, $m \in \mathbf{R}$ dargestellt werden.

Bemerkung:
Der Ausnahmefall der y-Achse wird durch die Gleichung $x = 0$ beschrieben.

Aufgabe:
Bestimme m so, dass die Ursprungsgerade durch die folgenden Punkte geht
a) A(1, 4) b)B(1, -3) c)C(5, 3) d)D(4, -3) e)E(-2, 5)





Verschiedene Varianten zu Lösung von d):
1)
Nimmt x um 4 zu, so verändert sich y um -3
Nimmt x um 1 zu, so verändert sich y um- $-\frac{3}{4}$, also ist $m = -\frac{3}{4}$.
Die Gerade d) hat damit die Gleichung $y = -\frac{3}{4} \cdot x$
2)
Die Koordinaten des Punktes P(4, -3) erfüllen die Funktionsgleichung
d.h. $f(4) = -3$ oder $-3 = 4m$, also ist m = $m = -\frac{3}{4}$.
Die Funktionsgleichung lautet damit $f : x \to y = -\frac{3}{4} \cdot x$
3)
m ist der Faktor mit dem man 4 multiplizieren muss, um – 3 zu erhalten. Also ist $m = -\frac{3}{4}$.
Die Funktionsgleichung lautet damit $f : x \to y = -\frac{3}{4} \cdot x$.

Lösungen zu den weiteren Aufgaben:
a) $y = 4x$, b) $y = -3x$ c) $y = \frac{5}{3} \cdot x$ e) $y = -\frac{5}{2} \cdot x$

Übungsaufgabe:
Die Gerade g geht durch O und P(12, 8). Gesucht sind die fehlenden Koordinaten der Geradenpunkte Q(21, v) und R(u, 22).

Lösung: Q(21, 14) und R(33, 22)