Lineare Gleichungssysteme

1. Gleichungslehre

Aufgabe:
Es sind alle Lösungen der Gleichung $2x \cdot (3x + 4) \cdot (2x - 1) = 0$ zu bestimmen.

Bemerkung:
Ausmultiplizieren ist nicht zu empfehlen.

$2x = 0$	$x_1 = 0$
$3x + 4 = 0$	$x_2 = -\frac{4}{3}$
$2x - 1 = 0$	$x_3 = \frac{1}{2}$

> Satz 1:
> Ein Produkt reeller Zahlen ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist
> $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ $\quad a, b \in R$

Beispiele:

$x^2 = 9$	$(x + 3) \cdot (x - 3) = 0$	$x_1 = 3$, $x_2 = -3$
$x^2 = 5$	$(x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) = 0$	$x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

Anmerkung:
Die beiden folgenden Fragestellungen sind zu unterscheiden:
a)
Welche Lösungen hat die Gleichung $x^2 = 9$?
Antwort: $x = \sqrt{9} = 3$ und $x = -\sqrt{9} = -3$
b)
Was bedeutet $\sqrt{9}$?
Antwort: nur +3 (und nicht auch -3).

Es ist $\sqrt{(-3)^2} = 3$ oder allgemein:

$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$a, b \in R$	
$\left(9 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(3 + \frac{2}{x}\right) = 0$	$\left(9 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$ oder $\left(3 + \frac{2}{x}\right) = 0$	$x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{2}{3}$
$x^2 + 4x = 0$	$x(x + 4) = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = -4$
$x^2 = 4x$	$x^2 - 4x = x \cdot (x - 4) = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = 4$
$x^3 - 9x = 0$	$x^3 - 9x = x \cdot (x^2 - 9) =$	
	$x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$
$x^3 + 9x = 0$	$x \cdot (x^2 + 9) = 0$	$x_1 = 0$

Wegen $(x^2 + 9) \geq 9$ liefert der zweite Faktor keine weiteren reellen Lösungen.

Übungsaufgabe:
Wie heissen die reellen Lösungen der Gleichung
$(x^2 - 7) \cdot (x^2 + 25) \cdot (x^2 + x - 12) = 0$

Lösung: $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$, $x_3 = -4$, $x_4 = 3$

In den folgenden Fällen können die Lösungen durch Faktorisieren gefunden werden:

$x^2 - 3x + 2 = 0$	$(x-1)\cdot(x-2) = 0$	$x_1 = 1,\ x_2 = 2$
$x^2 = -5x - 6$	$(x+2)\cdot(x+3) = 0$	$x_1 = -2,\ x_2 = -3$
$x \cdot (x-4) = 12$	$(x+2)\cdot(x-6) = 0$	$x_1 = -2,\ x_2 = 6$
$2x^3 + 2x^2 - 12x = 0$	$2x\cdot(x+3)\cdot(x-2) = 0$	$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0$
$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$	$(x^2-9)\cdot(x^2+1) = 0$	$x_1 = 3,\ x_2 = -3$

Übungsaufgabe:
Gesucht ist eine Gleichung mit den Lösungen 0, 1, $-\frac{1}{2}$ und 3.

Lösung: $x\cdot(x-1)\cdot(2x-1)\cdot(x-2) = 0$.

Aufgabe: Löse die folgende Gleichung:

$$x + \frac{1}{2} - \frac{2x}{3} = 3 - \frac{x}{2} \quad \Big| \cdot 6$$

$$6x + 3 - 4x = 18 - 3x \quad \Big| \quad \textit{ordnen}$$

a) $$2x + 3 = 18 - 3x \quad \Big| \quad +3x - 3$$

$$5x = 15 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{5}$$

$$x = 5$$

> Satz 2:
> Die Lösungsmenge einer Gleichung ändert sich nicht, wenn man
> - auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl (denselben Term) addiert oder subtrahiert
> - beide Seiten mit der gleichen, **von 0 verschiedenen Zahl** multipliziert
> - beide Seiten durch die gleiche, **von 0 verschiedene Zahl** dividiert.

Anmerkung:
Umformungen, welche die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern, heissen **Äquivalenzumformungen**.

Beispiele:

$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 0$	$4x = 0$	Lösung: x = 0
$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$	$0 \cdot x = 0$	allgemein gültig
$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x + 6$	$0 \cdot x = 6$	keine Lösung

Multipliziert man beide Seiten einer Gleichung mit einem Term, der die Variable enthält, so können - wie die folgenden Beispiele zeigen - Scheinlösungen auftreten. In diesem Fall ist eine Probe zu machen.

Beispiele:
a)
$$\frac{x-1}{x-1}-x=0$$
Multipliziert man diese Gleichung mit (x – 1), so erhält man die Gleichung
$x-1-x\cdot(x-1)=0$ oder vereinfacht
$x-1+x^2+x=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2=0$ mit der Scheinlösung x = 1.
Die Gleichung hat also keine Lösungen oder anders ausgedrückt ist L = {}.

Variante:
Für $x \neq 1$ kann der Bruch gekürzt werden. Dies führt auf die Gleichung 1- x = 0 oder x = 1.
Somit hat die ursprüngliche Gleichung keine Lösung.
b)
$$\frac{2x-1}{x-3}=\frac{5x-10}{x-3}\quad\Big|\cdot(x-3)$$
$2x-1 = 5x-10$
x = 3 ist eine Scheinlösung (der Nenner verschwindet für x = 3)
Die Gleichung hat keine Lösung, die Lösungsmenge ist L = {}.

Dividiert man eine Gleichung durch einen Term, der die Unbekannte enthält, so gehen in der Regel Lösungen verloren.

Beispiele:
a)
$x^2 = 3x$
Die Gleichung hat wegen $x\cdot(x-3) = 0$ die Lösungen $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 3$.
Dividiert man auf beiden Seiten durch x, dann geht die Lösung x = 0 verloren.

b)
Was stimmt hier nicht?
2 = 1?
Offensichtlich ist

$a^2-a^2=a^2-a^2$	umgeformt
$(a + a)\cdot(a – a) = a\cdot(a – a)$	Division durch $\cdot(a – a)$
2a = a	also gilt
2 = 1?	

Quadriert man beide Seiten einer Gleichung, können ebenfalls Scheinlösungen auftreten.

Beispiele:
a)
$\sqrt{5+x} = \sqrt{2x+11}$ quadrieren
$5 + x = 2x + 11$ x = - 6 Probe! L = {}.
Als Lösungen kommen nur reelle Zahlen x ≥ -5 in Frage (die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist nicht definiert..

b)
$\sqrt{5+2x} = \sqrt{x+4}$ x = -1 Die Probe stimmt!