5. Beispiele mit Parametern, Cramersche Regel

Variablen deren Werte als bekannt angenommen werden, heissen Parameter. In den folgenden Beispielen sind a, b, .. Parameter.

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{ll} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} & = 2 \\ ax - by & = a^2 + b^2 \end{array} \right| \qquad a \neq 0 \text{ und } b \neq 0.$$

Die erste Gleichung wird mit a·b multipliziert.

$$\left| \begin{array}{l} bx - ay = 2ab \\ ax - by = a^2 + b^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \cdot(-b) \\ \cdot a \end{array}$$

$x \cdot (a^2 - b^2) = a \cdot (a^2 - b^2)$

Lösungen

1) im Normalfall: $b^2 \neq a^2$:

Division durch $\cdot(a^2 - b^2)$ ergibt die Lösung x = a

Einsetzen in die 1. Ausgangsgleichung ergibt y = -b

Lösungsmenge: $L = \{(a, -b)\}$

Die Lösung kann mit der 2. Ausgangsgleichung überprüft werden.

2) Spezialfall $(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b) = 0$

2.1: Wenn b = a dann heisst das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lll} ax & -ay & = 2a^2 \\ ax & -ay & = 2a^2 \end{array} \right|$$

oder nach Division durch a:

$$\left| \begin{array}{lll} x & -y & = 2a \\ x & -y & = 2a \end{array} \right|$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

$x \in$ R kann beliebig gewählt werden, y ist dann zu $y = x - 2a$ bestimmt.

$L = \{x \in R \,/\, y = x - 2a\}$

2.2: Wenn b = -a dann heisst das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lll} -ax & -ay & = -2a^2 \\ ax & +ay & = 2a^2 \end{array} \right|$$

oder nach Division durch a:

$$\left| \begin{array}{lll} -x & -y & = -2a \\ x & +y & = 2a \end{array} \right|$$

Das Gleichungssystem hat ebenfalls unendlich viele Lösungen:

$x \in$ R kann beliebig gewählt werden, y ist dann zu $y = 2a - x$ bestimmt.

$L = \{x \in R \,/\, y = 2a - x\}$

Löst man das allgemeine Gleichungssystem in den Variablen x und y mit dem Additionsverfahren, so erhält man

$$\left|\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right| \begin{array}{c} \cdot\, b_2 \\ \cdot\,(-b_1) \end{array} \left| \begin{array}{c} \cdot\,(-a_2) \\ \cdot\, a_1 \end{array}\right.$$

$x \cdot (a_1b_2 - b_1a_2) = c_1b_2 - c_2b_1$ (*) und damit

$x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ sofern $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Die im Zähler und Nenner auftretenden Differenzen werden mit den folgenden Schemata, den sogenannten Determinanten, geschrieben:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Damit lassen sich die beiden Lösungen in der folgenden Form darstellen:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{sofern } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \textbf{Cramersche Regel}$$

Die Lösungen x und y ergeben sich als Quotient zweier Determinanten. In der Nennerdeterminante stehen die Koeffizienten der Unbekannten. Die Zählerdeterminante entsteht aus der Nennerdeterminante, indem man die Koeffizienten der zu berechnenden Unbekannten durch die Konstanten ersetzt (unter der Voraussetzung, dass die Nennerdeterminante nicht verschwindet). In diesem Ausnahmefall hat das Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen).

Beispiele für die drei Fälle

1. Normalfall $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$: genau eine Lösung

$\left|\begin{array}{r} 3y + 8x - 14 = 0 \\ y = 6x - 4 \end{array}\right|$ ordnen $\left|\begin{array}{ll} 8x + 3y & = 14 \\ 6x - y & = 4 \end{array}\right|$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{-26} = 1 \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 14 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-52}{-26} = 2$$

Lösungsmenge $L = \{(1, 2)\}$

2. Ausnahmefälle

2.1 keine Lösung

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} x-2y=4 \\ -3x+6y=9 \end{vmatrix}$$ die zugehörigen Geraden sind parallel

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 42 \neq 0$$

Aus Gleichung (*) folgt $0 \cdot x = 42$, eine Gleichung, die keine Lösung hat.

Ist $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, dann hat das Gleichungssystem keine Lösung

2.2.

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

$$\begin{vmatrix} 2x-3y=6 \\ -8x+12y=-24 \end{vmatrix}$$ die zugehörigen Geraden fallen zusammen

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -8 & 12 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -24 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Aus Gleichung (*) folgt $0 \cdot x = 0$, eine Gleichung, die unendlich viele Lösungen hat.
Wählt man x ∈ R, dann ist y bestimmt zu $y = \frac{2}{3}(x-3)$

Ist $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, dann hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Aufgabe:
Gesucht sind die Lösungen der folgenden Systeme:

a)

$$\begin{vmatrix} (b-6)\cdot x - y = 0 \\ bx+y=2 \end{vmatrix}$$

Determinante: $\Delta = 2b - 6 = 2(b-3)$

Das System hat für

$b \neq 3$: die eindeutige Lösung $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{b-6}{3}$,
die zugehörigen Geraden schneiden sich.

$b = 3$: keine Lösung, die zugehörigen Geraden sind parallel

b)

$$\begin{vmatrix} 2x+py=8 \\ px+8y=p^2 \end{vmatrix}$$

Determinante: $\Delta = 16 - p^2 = (4-p)(4+p)$

Das System hat für

$|p| \neq 4$: die eindeutige Lösung $x = \frac{16}{p+4} + p$, $y = -\frac{2p}{p+4}$,
die zugehörigen Geraden schneiden sich

p = -4: keine Lösung, die zugehörigen Geraden sind parallel

p = 4 unendlich viele Lösungen, die zugehörigen Geraden fallen zusammen

Übungsaufgabe:
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem mit dem Parameter m.

$$\begin{vmatrix} mx & -6y & = & 5m-3 \\ 2x & +(m-7)y & = & -7m+29 \end{vmatrix}$$

Wie ist der Parameter m zu wählen, dass
a) das System unlösbar ist
b) das System unendlich viele Lösungen hat?
c) dass die Lösungen zusätzlich die Bedingung y = x erfüllen?

Lösung: Determinante: $\Delta\ = m^2 - 7m + 2 = (m-4)(m-3) = 0$
a) m = 4 keine Lösung

$$\begin{vmatrix} 4x & -6y & = & 17 \\ 2x & -3y & = & 1 \end{vmatrix}$$

b) m = 3 unendlich viele Lösungen $x\ =\ 4 + 2y$ und $y\ \in R$
c) $m = \frac{21}{4}$ mit den Lösungen $x = y\ =\ -31$

Die sogenannte Cramersche Regel gilt entsprechend auch für Gleichungssysteme mit n Gleichungen und n Unbekannten. Sie ist vor allem in der Theorie der linearen Gleichungssysteme wichtig.