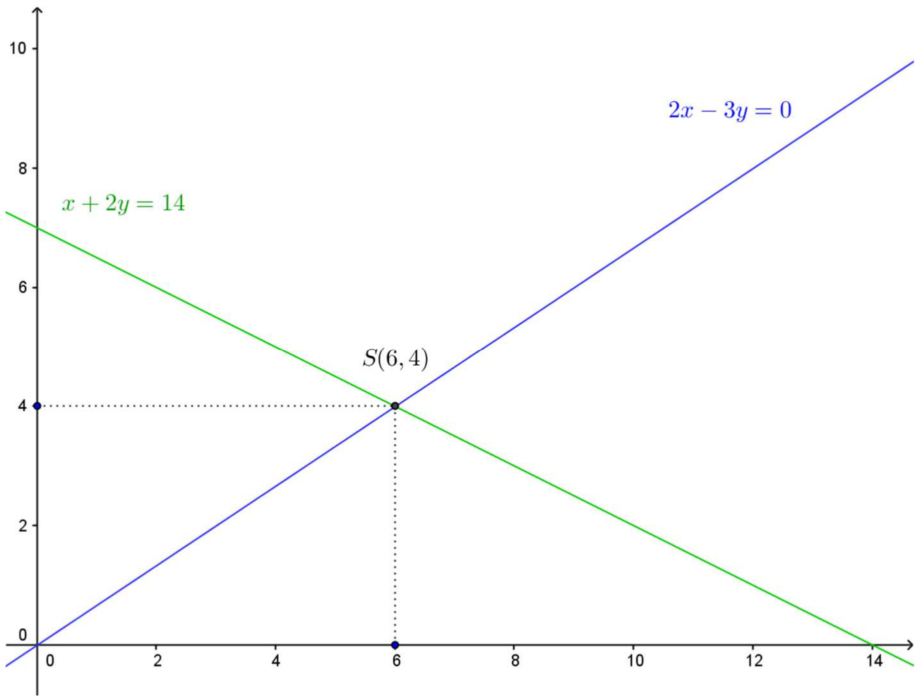
2. Graphische Lösung eines linearen Gleichungssystems

Einführendes Beispiel:
x + 2y = 14 lineare Gleichung mit den Unbekannten x und y.

Unter einer Lösung einer linearen Gleichung mit zwei Unbekannten verstehen wir ein Zahlenpaar (x, y), das die Gleichung erfüllt. Die vorgegebene Gleichung hat unendlich viele Lösungen. Eine der Unbekannten z.B. x kann beliebig gewählt werden, $y = 7 - \frac{1}{2} \cdot x$ ist dann eindeutig bestimmt. Die Punkte, deren Koordinaten die Gleichung x + 2y = 14 erfüllen, liegen auf einer Geraden mit der Steigung m = $-\frac{1}{2}$ und dem y-Achsenabschnitt q = 7.
Durch eine weitere Gleichung z.B. 2x - 3y = 0 ist in diesem Fall die Lösung eindeutig bestimmt. Die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden x = 6 und y = 4 erfüllen beide Gleichungen. Wir sagen, x = 6 und y = 4 sind eine Lösung des linearen Gleichungssystems oder:
Das Gleichungssystem hat die Lösungsmenge $L = \{(6,4)\}$

$$\left| \begin{array}{l} x + 2y = 14 \\ 2x - 3y = 0 \end{array} \right|$$



Bemerkung:
Linearität bedeutet, dass die Unbekannten nur mit Konstanten aber nicht miteinander multipliziert werden.
Gegenbeispiel:
Die Gleichung $3x^2 - 4xy + 4 = 0$ ist nicht linear.

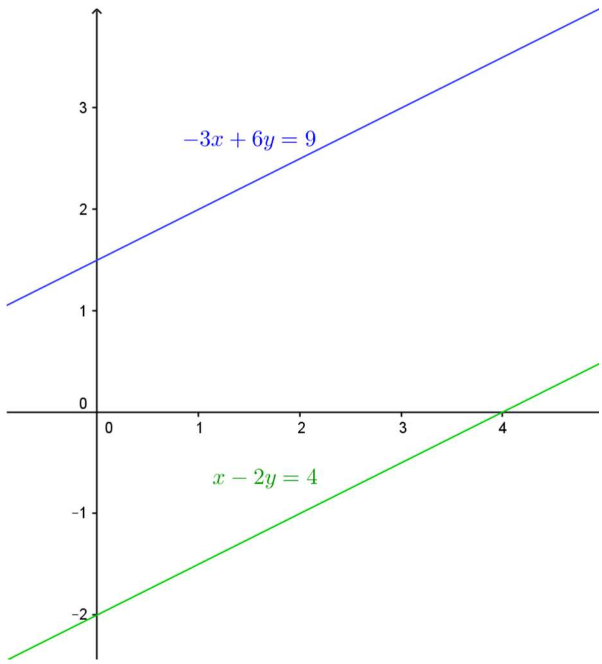
Allgemein:
Denkt man sich alle Lösungen der linearen Gleichung $ax + by + c = 0$ in einem Koordinatensystem dargestellt, so ist der Graph eine Gerade (Ausnahmefall: a = b = 0). Damit können die beiden Gleichungen eines linearen Gleichungssystems als Gleichungen zweier Geraden g und h interpretiert werden. Je nach der gegenseitigen Lage von g und h können drei Fälle auftreten:

1. Die beiden Geraden schneiden sich: Die Koordinaten des Schnittpunkts erfüllen beide Gleichungen und lösen damit das Gleichungssystem eindeutig.
2. Die beiden Geraden sind parallel und verschieden. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.
3. Die beiden Geraden fallen zusammen. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Beispiel zu 2.:

$$\left| \begin{array}{r} x - 2y = 4 \\ -3x + 6y = 9 \end{array} \right|$$

Dividiert man die 2. Gleichung durch (-3), so erhält man
$x - 2y = -3$
Die zugehörige Gerade ist zur Geraden der ersten Gleichung parallel, das Gleichungssystem ist unlösbar.



Beispiel zu 3.

$$\left| \begin{array}{r} 2x - 3y = 6 \\ -8x + 12y = -24 \end{array} \right|$$

Dividiert man die 2. Gleichung durch (-4), so erkennt man, dass die beiden Gleichungen dieselbe Gerade darstellen. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. x $\in$ R kann beliebig gewählt werden, y ist dann bestimmt zu
y = $\frac{2}{3} \cdot x - 2$.