4. Beispiele von nichtlinearen Gleichungssystemen

In den folgenden Beispielen ist das Gleichungssystem nicht linear, denn es kommen Variablen im Nenner vor.

Beispiele:

a)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{p+1}{q+2} - \frac{p-3}{q-3} = 0 \\ \frac{p-1}{q-1} = \frac{p+4}{q+5} \end{array} \right|$$

Da für die Werte q = -2, 3, 1, -5 die Nenner verschwinden, kommen diese Werte als Lösungen nicht in Frage.

Multipliziert man für q ≠ -2, 3, 1, -5 die 1. Gleichung mit dem Hauptnenner (q + 2)·(q - 3) und die 2. mit (q - 1)··(q + 5), so erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{r} -5p + 4q = -3 \\ 6p - 5q = 1 \end{array} \right| \qquad p = 11 \;\; q = 13$$

p und q erfüllen auch die Ausgangsgleichungen.
Lösungsmenge $L = \{(11, 13)\}$

Kommt derselbe Term in beiden Gleichungen vor, so kann eine Substitution (Ersetzung) das Problem vereinfachen.

b)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{30}{x} + \frac{4}{y} = 4 \end{array} \right|$$

Die Substitutionen $u = \frac{6}{x}$ und $v = \frac{4}{y}$ führen auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} u - 2v = 3 \\ 5u + v = 4 \end{array} \right|$$

mit den Lösungen v = -1 u = 1.
Macht man die Substitution rückgängig, so ergeben sich die gesuchten Lösungen wegen

$u = \frac{6}{x} = 1$ zu x = 6 und wegen

$v = \frac{4}{y} = -1$ zu y = -4

$L = \{(6, -4)\}$

c)

$$\left| \begin{array}{l} \frac{14}{x+y} + \frac{9}{x-y} = 5 \\ \frac{35}{x+y} - \frac{6}{x-y} = 3 \end{array} \right|$$

Die Substitutionen $u = \frac{7}{x+y}$ und $v = \frac{3}{x-y}$ führen auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 2v = 3 \end{array} \right|$$

mit den Lösungen u = 1 und v = 1.
Macht man die Substitutionen rückgängig, so führt dies auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{array} \right|$$ mit den Lösungen x = 5 y = 2.

Diese Werte erfüllen beide Ausgangsgleichungen.
$L = \{(5, 2)\}$