

4. Beispiele von nichtlinearen Gleichungssystemen

In den folgenden Beispielen ist das Gleichungssystem nicht linear, denn es kommen Variablen im Nenner vor.

Beispiele:

a)

$$\begin{cases} \frac{p+1}{q+2} - \frac{p-3}{q-3} = 0 \\ \frac{p-1}{q-1} = \frac{p+4}{q+5} \end{cases}$$

Da für die Werte $q = -2, 3, 1, -5$ die Nenner verschwinden, kommen diese Werte als Lösungen nicht in Frage.

Multipliziert man für $q \neq -2, 3, 1, -5$ die 1. Gleichung mit dem Hauptnenner $(q+2) \cdot (q-3)$ und die 2. mit $(q-1) \cdot (q+5)$, so erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} -5p + 4q = -3 \\ 6p - 5q = 1 \end{cases} \quad p = 11 \quad q = 13$$

p und q erfüllen auch die Ausgangsgleichungen.

Lösungsmenge $L = \{(11, 13)\}$

Kommt derselbe Term in beiden Gleichungen vor, so kann eine Substitution (Ersetzung) das Problem vereinfachen.

b)

$$\begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{30}{x} + \frac{4}{y} = 4 \end{cases}$$

Die Substitutionen $u = \frac{6}{x}$ und $v = \frac{4}{y}$ führen auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} u - 2v = 3 \\ 5u + v = 4 \end{cases}$$

mit den Lösungen $v = -1$ $u = 1$.

Macht man die Substitution rückgängig, so ergeben sich die gesuchten Lösungen wegen

$$u = \frac{6}{x} = 1 \quad \text{zu } x = 6 \quad \text{und wegen}$$

$$v = \frac{4}{y} = -1 \quad \text{zu } y = -4$$

$$L = \{(6, -4)\}$$

c)

$$\begin{cases} \frac{14}{x+y} + \frac{9}{x-y} = 5 \\ \frac{35}{x+y} - \frac{6}{x-y} = 3 \end{cases}$$

Die Substitutionen $u = \frac{7}{x+y}$ und $v = \frac{3}{x-y}$ führen auf das folgende lineare

Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 2v = 3 \end{cases}$$

mit den Lösungen $u = 1$ und $v = 1$.

Macht man die Substitutionen rückgängig, so führt dies auf das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{mit den Lösungen} \quad x = 5 \quad y = 2.$$

Diese Werte erfüllen beide Ausgangsgleichungen.

$$L = \{(5, 2)\}$$