6. Wurzeln

Definition, einführende Beispiele.

Einführende Probleme:
a)
Welche Länge hat die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 5 cm^2?
Das Problem führt auf die quadratische Gleichung $x^2 = 5$ mit den Lösungen
$x_1 = \sqrt{5}$ und $x_2 = -\sqrt{5}$
dabei ist $\sqrt{5}$ diejenige nicht-negative Zahl, deren Quadrat gleich 5 ist.

b)
Delisches Problem der Verdoppelung des Würfels:
Welche Länge hat die Kante x eines Würfels mit dem Volumen 2 m^3!
Das Problem führt auf die kubische Gleichung $x^3 = 2$. Gesucht ist also eine Zahl, deren dritte Potenz gleich 2 ist. Diese Zahl wird mit $\sqrt[3]{2}$ bezeichnet. Sie kann durch eine sogenannte Intervallschachtelung mit rationalen Zahlen als Intervallgrenzen eindeutig festgelegt werden.
Eine Intervallschachtelung ist eine nicht abbrechende Folge von ineinander geschachtelten Intervallen, deren Breite schliesslich beliebig klein wird.

Beispiel: $\sqrt[3]{2}$

$1 < x < 2$	denn $1^3 < 2 < 2^3$	Intervallhalbierung
$1 < x < 1.5$	denn $1^3 < 2 < 1.5^3$	
$1 < x < 1.25$	denn $1^3 < 2 < 1.25^3$	
$1.25 < x < 1.375$		
$1.25 < x < 1.3125$		

Allgemein:
Die Aufgabe, die Gleichung $x^q = a$ nach der Basis x aufzulösen, führt auf Wurzeln bzw. Potenzen mit rationalen Exponenten.

Definition:
$\sqrt[q]{a}$ bedeutet diejenige eindeutig bestimmte reelle **nichtnegative** Zahl x, deren q-te Potenz gleich a ist, also
$x = \sqrt[q]{a} \leftrightarrow x^q = a \quad a \geq 0, x \geq 0, n \in N$

Bemerkungen:
Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kurz $\sqrt{a}$
a heisst Radikand.

Folgerung aus der Definition:
$(\sqrt[n]{a})^n = a \qquad \sqrt[n]{a^n} = a \qquad a \geq 0$

Beispiele:

$\sqrt[5]{32} = 2$ denn $2^5 = 32$

$\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$ denn $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

$\sqrt{(-3)^2} = 3$ allgemein $\sqrt{a^2} = |a|=$

$\sqrt[6]{a^{12}} = a^2$ denn $(a^2)^6 = a^{12}$

$\sqrt[3]{-27}$ ist nicht definiert!

Die folgenden Fragestellungen sind zu unterscheiden:

a) Was bedeutet $\sqrt[q]{a}$? Eine Wurzel ist nicht oder eindeutig definiert.
b) Welche Lösungen hat $x^q = a$ Eine Gleichung kann u.U. mehrere Lösungen haben.

Beispiele:
Die Gleichung $x^4 = 15$ hat die Lösungen $\sqrt[4]{15}$ und $-\sqrt[4]{15}$
Die Gleichung $x^4 = -15$ hat keine reellen Lösungen
Die Gleichung $x^3 = -8$ hat die Lösung $-\sqrt[3]{8} = -2$
Die Gleichung $x^3 = -15$ hat die Lösung $-\sqrt[3]{15}$ (und nicht $\sqrt[3]{-15}$)

Bei der Lösung der Gleichung $a^b = c$ sind die folgenden 3 Problemstellungen zu unterscheiden:

gegeben: a, b	gesucht: Potenz c	Potenzieren
gegeben: b, c	gesucht: Basis a	Radizieren
gegeben: a, c	gesucht: Exponent b	→ Logarithmieren (im nächsten Kapitel).

Statt mit einer Intervallschachtelung kann $\sqrt[3]{a}$ folgendermassen berechnet werden:

Ansatz:

$\sqrt[3]{a} = x_0 + \varepsilon$ potenzieren mit 3 (Binomischer Lehrsatz)

$a = (x_0 + \varepsilon)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon + 3x_0\varepsilon^2 + \varepsilon^3$ Höhere Potenzen von ε werden vernachlässigt

$$a \approx x_0^3 + 3x_0^2\varepsilon$$

$$\varepsilon \approx \frac{a}{3x_0^2} - \frac{x_0}{3}$$

$$x_0 + \varepsilon = x_0 + \frac{a}{3x_0^2} - \frac{x_0}{3} = \frac{1}{3}\left(2x_0 + \frac{a}{x_0^2}\right)$$

Damit erhält man den folgenden

Algorithmus zur Berechnung von $\sqrt[3]{a}$

1. Näherung $x_0 = \frac{1+a}{2}$

Wiederhole bis die Abbruchbedingung erfüllt ist:

verbesserte Näherung: $x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{a}{x_k^2}\right)$

Beispiel: a = 2

$x_0 = \mathbf{1}.5$ $x_1 \approx \mathbf{1.2}96$ $x_2 \approx \mathbf{1.2}609$ $x_3 \approx \mathbf{1.259921}86$ $x_4 \approx \mathbf{1.25992105} \approx x_5$