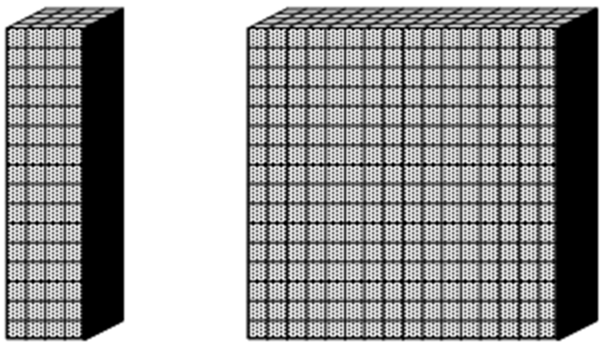
5. Nichtdezimale Zahlensysteme

Dezimalsystem:
2315$_{10}$ = **2**$\cdot 10^3$ + **3**$\cdot 10^2$+ **1**$\cdot 10^1$ + **5**$\cdot 10^0$ bedeutet
2 Tausender, 3 Hunderter, 1 Zehner und 5 Einer.
Basis b = 10, Ziffern 0, 1, ..., 9 (10 ist keine Ziffer!)

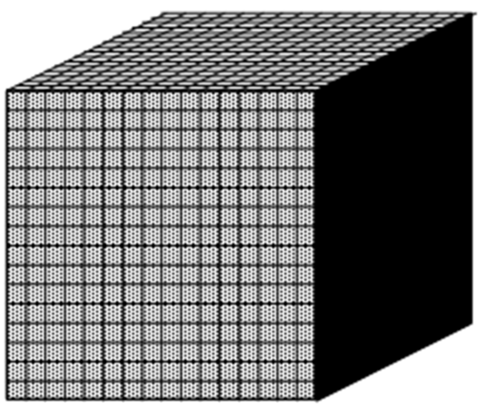
Im Unterschied zum römischen Zahlensystem ist das Dezimalsystem ein Stellenwertsystem. Der Wert einer Ziffer hängt von der Stelle ab, an der die Ziffer steht (beim römischen Zahlensystem bedeutet z.B. V immer 5, X immer 10). (ac)
Im folgenden Beispiel, dem Vierersystem bedeutet 1230_4:
0 Einer, 3 Vierer, 2 Sechzehner und ein Vierundsechziger (im Dezimalsystem 108)

1_4 2_4 3_4 10_4 11_4 12_4 13_4

100_4 1000_4



100000_4 100000_4



1000000_4

Ausser 1 kann jede natürliche Zahl b als Basis gewählt werden:

$$z_b = z_0 + z_1 \cdot b + z_2 \cdot b^2 + ... + z_n \cdot b^n = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot b^i \qquad \text{mit } z_i \in \{0, 1, 2, ..., b-1\}$$

Mit n Stellen können b^n Zahlen dargestellt werden, nämlich 0, 1, 2, , ... , b^n - 1.

Gebräuchlich sind die Systeme zur

Basis 2	Dualsystem
Basis 8	Oktalsystem, Karl 12. wollte 1717 das Oktalsystem einführen und kam prompt in einer Schlacht um
Basis 10	Dezimalsystem
Basis 16	Hexadezimalsystem, wichtig in der Informatik

historisch:
b = 12 (Duodezimalsystem, 1 Dutzend = 12 Stück, 1 Gros = 12 Dutzend = 12^2 Stück)
b = 20 (Kelten, 80 = quatre-vingt)
b = 60 (Babylonier, 1 Stunde = 60 Minuten = 60^2 Sekunden)

Einführende Aufgabe:
Basis b = 5, Ziffern 0,1,2,3,4
Gegeben ist eine unbekannte Anzahl x von Reisnägeln ($50 < x < 100$). Bestimme ihre Anzahl im Fünfersystem.
Zunächst werden Fünferpakete gebildet. 5 Fünferpakete bilden ein Fünfundzwanziger-Paket, 5 Fünfundzwanziger-Pakete bilden ein Hundertfünfundzwanzigerpaket.
Ergebnis:
2 Fünfundzwanziger und 3 Fünfer und 4 Einer. Wir schreiben dafür kurz: 234_5.

Weitere Beispiele:
a) 23_5 (13_{10}) b) 304_5 (79_{10}) c) 2130_5 (290_{10}) d) 43000_5 (2875_{10})

Wie stellt man eine Zahl im System mit der Basis b im Zehnersystem dar?

b = 8 **Oktalsystem** Ziffern: 0, 1, ... , 7
$\mathbf{3217_8} = 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = \mathbf{1679_{10}}$

Weitere Beispiele:
a) $235_8 = 157_{10}$ b) $50335_8 = 20701_{10}$

b = 12 **Duodezimalsystem**
Im **Zwölfersystem** gibt es die Ziffern mit 0,1,2, ..., 8, 9, A (dezimal 10), und B (dezimal 11)
$\mathbf{A9B1_{12}} = 10 \cdot 12^3 + 9 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^0 = \mathbf{18709_{10}}$

Weitere Beispiele:
a) $37_{12} = 43_{10}$ b) $A3B_{12} = 1478_{10}$ c) $3AB_{12} = 563_{10}$ $ABBA_{12} = 19006_{10}$

b = 16 **Hexadezimalsystem**
Ziffern mit 0,1,2, ..., 8, 9, A (dezimal 10), B (dezimal 11), C (12), D (13), E (14) und F (15)
$\mathbf{2B_{16}} = 2 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = \mathbf{43_{10}}$

Weitere Beispiele: $D1F_{16} = 3359_{10}$

Aufgabe:
In welchem System mit der Basis b gilt:
a) 52_b ist das Doppelte von 25_b
Lösung: $2 \cdot (2b + 5) = 5b + 2$ liefert b = 8, Kontrolle: $5 \cdot 8 + 2 = 2 \cdot (2 + 5)$
b) $79_{10} = 142_b$
Lösung: $b^2 + 4b - 77 = 0$ ergibt die gesuchte Basis $b_1 = 7$ ($b_2 = -11$)
c) $301_b = I^2_b$ I ist eine ganze Zahl
Bei welcher Basis ist $3b^2 + 1$ eine Quadratzahl?
Antwort b = 4, denn $301_4 = (111_4)^2$ bzw. $49_{10} = (7_{10})^2$

Wie stellt man eine Dezimalzahl im System zur Basis b dar?

Aufgabe:
Die Dezimalzahl 46 soll bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden:
$46_{10} = 51_9 = 56_8 = 64_7 = 114_6 = 141_5 = 232_4 = 1201_3 = 101110_2$

b = 8
Die Dezimalzahl 142 ist im Achtersystem darzustellen:
Lösung mit fortlaufender Division durch 8
$142 = \mathbf{17} \cdot 8 + \mathbf{6}$ 17 Achter, **6** Einer
$\mathbf{17} = \mathbf{2} \cdot 8 + \mathbf{1}$ **2** Vierundsechziger, **1** Achter also $142_{10} = \mathbf{216}_8$
$\mathbf{2} = 0 \cdot 8 = \mathbf{2}$ 0 zweihundertsechsunfünfziger 2 Vierundsechziger also $142_{10} = \mathbf{216}_8$

Weiteres Beispiel: $293_{10} = 445_8$

b = 5
Stelle Die folgenden Dezimalzahlen sind im Fünfersystem darzustellen:
a) $333_{10} = 2313_5$ b) $1488_{10} = 21423_5$ c) $12879_{10} = 403004_5$

Weitere Beispiele:
$43_{10} = 1121_3 = 37_{12} = 2B_{16}$ $666_{10} = 1641_7 = 476_{12} = 1010011010_2$
$2000_{10} = 5555_7$

Rationale Zahlen in nichtdezimalen Zahlensystemen

Was heisst eigentlich 0.745 ? $7 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$

$0.324_5 = 0.712_{10}$ $3 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + 4 \cdot 5^{-3}$
$123.4_5 = 38.8_{10}$
$0.9BA_{12} = \frac{719}{864}{}_{10} = 0.83217...$ Duodezimalbruch abbrechend,

$0.4_{12} = 0.3333...$ Dezimalbruch nichtabbrechend

Übungsaufgaben:
a) 1.0122_3 b) 0.302_4 c) 10.404_5 d) 2.35_6 e) 102.58_9

Der wichtige Fall des Dualsystems (Binärsystems)   Basis b = 2   Ziffern 0,1

There are only 10 sorts of people: those that can read binary and those that can’t
(Hackerslogan)

Zähle im Dualsystem bis zu den fünfstelligen Dualzahlen.
1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000; 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000, ...

a) Dezimal- in Dualzahl
Wandle die Dezimalzahl 238_{10} in eine Dualzahl um.
Lösung durch fortlaufende Division durch 2:

$238 = 119 \cdot 2 + \mathbf{0}$	**0**	Einer
$119 = 59 \cdot 2 + \mathbf{1}$	**1**	Zweier
$59 = 29 \cdot 2 + \mathbf{1}$	**1**	Vierer
$29 = 14 \cdot 2 + \mathbf{1}$	**1**	Achter
$14 = 7 \cdot 2 + \mathbf{0}$	**0**	Sechzehner
$7 = 3 \cdot 2 + \mathbf{1}$	**1**	Zweiunddreissiger
$3 = 1 \cdot 2 + \mathbf{1}$	**1**	Vierundsechziger
$1 = 0 \cdot 2 + \mathbf{1}$	**1**	Hundertachtundzwanziger
$\mathbf{238_{10}}$	$\mathbf{= 11101110_2}$	

b) Dualzahl in Dezimalzahl
Stelle die folgenden Dualzahlen im Dezimalsystem dar:
a) 1001 = 9   b) 111001 = 57   c) 100110 = 38   d) 1010100 = 84   e) 1011011 = 91

Lösung mit dem so genannten Hornerschema:

1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**Dualzahl**
	2	4	8	18	38	78	156	314	630	1260	
1	2	4	9	19	39	78	157	315	630	**1261**	**Dezimalzahl**

Die folgenden Dezimalzahlen sind im Dualsystem darzustellen:
27_{10} = 11011 49_{10} = 110001 152 = 10011000 1336_{10} = 10100111000
$6423_{10} = 1100100010111_2$

Aufgabe:
Wie viele Stellen werden im Dualsystem benötigt, um die folgenden Dezimalzahlen als Dualzahlen darzustellen:
a) 387   b) 8 788   c) 555 777   d) 100010001
Wie viele Stellen werden im Dezimalsystem benötigt, um die folgenden Dualzahlen als Dezimalzahlen darzustellen:
a) 1110   b) 1011011   c) 1000000001   d) 101010101010101

Eine Anwendung in der Informatik: Schneller Algorithmus zur Berechnung von "grossen" Potenzen x^k

Dualbrüche

Die folgenden Dezimalbrüche sind als Dualbrüche darzustellen:
a) $\frac{13}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} = 0.1101$
b) 0.4375 = 0.**0111**
Lösung durch fortgesetzte Multiplikation mit 2
0.875 Zweitel **1**.75 Viertel **1**.5 Achtel **1** Sechzehntel
c) $0.40625_{10} = 0.01101_2$

Im folgenden Beispiel wird man den ganzzahligen und den gebrochenen Anteil getrennt umwandeln:
$53.4375_{10} = 110101.0111_2$

Übungsaufgaben:
a) $0.78125 = 0.11001_2$
b) $0.828125 = 0.5 + 0.25 + 0.0625 + 0.0156125 + 0.009075 = 0.110101_2$
c) 10.01001_2
d) 0.11111_2

Es kann vorkommen, dass die Entwicklung nicht abbricht.
Dem Bruch $\frac{2}{3}$ im Dezimalsystem entspricht der periodische Dualbruch $0.\underline{10}$.
Im Kapitel Folgen wird das Thema wieder aufgegriffen. Es handelt sich eine
→ nichtabbrechende geometrische Reihe mit a = $\frac{1}{2}$ und q = $\frac{1}{4}$.

Dem Dezimalbruch $\frac{6}{7}$ entspricht der periodische Dualbruch $0.\underline{1101}$
$\frac{2}{3} = 0.\underline{01}$ (periodischer Dualbruch)
$\frac{77}{15} = 101.0010$

Übungsaufgabe * für Informatiker:
Wie heissen die ersten 15 Stellen der Dualbruchentwicklung von
e = 2.71828182845904523536... ? (Quelle: ETH-Übungsaufgabe)

Arithmetik im Dual-, Binärsystem

Das kleine Einmaleins 1 + 1 = 10

Addition	10111 + 1001 = 100000	(23 + 9 = 32)
	1101 + 11000 = 100101	(13 + 24 = 37)
Subtraktion	11111 - 1001 = 10110	(31 - 17 = 14)
	101000 - 10111 = 10001	(40 - 23 = 17)
	11000 - 1101 = 1011	(24 - 13 = 11)
Multiplikation	1011 · 101 = 110111	(11 · 5 = 55)
	1101 · 11000 = 100111000	(13 · 24 = 312
Division	1000001 / 101 = 1101	(65 / 5 = 13)
	1011101 / 1011 = 1000 Rest 101	(93 / 11 = 8 Rest 5)
	11001 / 101 = 101	

Ergänzungen:

Basis b = -2 In diesem System gibt es keine negativen Zahlen

b = 10	1	2	3	4	5	6	7	8
b = -2	1	110	111	100	101	11010	11011	11000

b = 10	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
b = -2	11	10	1101	1100	1111	1110	1001	1000

Basis b = -10

b = 10	1234567890	-1234567890
b = -2	11375573910	2846648290

Die folgende Basis setzt die Kenntnis der komplexen Zahlen voraus:
Basis b = 2i **Ziffern 0, 1, 2, 3**

b = 10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b = 2i	1	2	3	10300	10301	10301	10303	10200	10201

b = 10	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
b = 2i	103	102	101	100	203	202	201	200	303

Basis b = - 3 **Ziffern 0, 1, 2 bzw. – 1**

b = 10	1	2	3	4	5	6
b = -3	0 0 1	0 -1-1	0 -1 0	0 -1 1	1 1 -1	1 1 0

b = 10	7	8	9	10	11	12
b = -3	1 1 1	1 0 -1	1 0 0	1 0 1	1 -1 -1	1 -1 0

"Das Problem der 12 Marmorkugeln" ist eine Anwendung.