7. Potenzen mit rationalen Exponenten

Einführendes Beispiel:
Wir versuchen $\sqrt[3]{2}$ als Potenz von 2 zu schreiben. Bei dieser Erweiterung sollen die bisherigen 5 Potenzgesetze gültig bleiben.

$\sqrt[3]{2} = 2^x$ mit 3 potenziert

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \left(2^x\right)^3 = 2^{3x} = 2^1$ Also definieren wir: $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

analog $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

$2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}$

$2^{-\frac{6}{8}} = \sqrt[8]{2^{-6}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = 2^{-\frac{3}{4}}$

Die Definition ist damit unabhängig vom Kürzen oder Erweitern des Exponenten.

> Definition:
> $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ $a \geq 0$, $p \in Z$, $q \in N$

Es kann gezeigt werden, dass diese Definition eindeutig ist und die 5 Potenzgesetze gültig bleiben.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	P1	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	P4
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	P2	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	P5
$\left(a^n\right)^m = a^{nm}$	P3		

Bei den folgenden sehr ähnlichen Beispielen geschehen hin und wieder Fehler:

$4^2 = 16$	$4^{-2} = \frac{1}{16}$	$-4^2 = -16$	$4^{\frac{1}{2}} = 2$	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$	$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$

Die Voraussetzung $a \geq 0$ ist wesentlich wie der folgende „Scheinbeweis“ zeigt:
Ist -2 = 2?

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = (8^2)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

Beispiele:

$27^{\frac{1}{3}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} = 3$ P3

$25^{-\frac{1}{2}} = \left(5^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ P3

$16^{\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 2^3$ P3

$36^{-\frac{3}{2}} = \left(6^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 6^{-3}$ P3

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$ P1

Eine Frage:
Ist $a = \frac{1}{2}(12^{99} + 12^{100})$ grösser, gleich oder kleiner als $b = 12^{\frac{199}{2}}$?
$a = \frac{1}{2}(12^{99} + 12^{100}) = 12^{99} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 12)$
$b = 12^{\frac{199}{2}} = 12^{99} \cdot 12^{\frac{1}{2}}$
Wegen $\frac{1}{2} \cdot (1 + 12) > 12^{\frac{1}{2}}$ gilt $a > b$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}$ P1

$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{7}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{5}{12}}$ P1, P2

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$ P3 allgemein: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}} = \left(a \cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{6}}$ P1, P3

$\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^3}}} = \sqrt[24]{a^{19}}$

Die Potenzgesetze 4 und 5 besagen, dass Radizieren und Multiplizieren bzw. Dividieren vertauschbar sind:

$\sqrt{16 \cdot 9} = (16 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ P4 allgemein: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Aber: Addieren (auch Subtrahieren) und Radizieren sind **nicht** vertauschbar:

$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$ allg. $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}$

$\frac{\sqrt[3]{100}}{\sqrt[3]{12.5}} = \sqrt[3]{\frac{100}{12.5}} = \sqrt[3]{8} = 2$ P5 allg. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Übungsaufgaben
a) Die Resultate der folgenden aufgaben sind ohne TR zu bestimmen:
$\sqrt{2^{47} \cdot 2^{47}} \ldots \sqrt{2^{47} : 2^{47}} \ldots \sqrt{2^{47} - 2^{47}} \ldots \sqrt{2^{47} + 2^{47}}$
b) Die folgenden Zahlen sind aufsteigend nach der Grösse anzuordnen:
$\sqrt[8]{88^{88}}$ $\sqrt[8]{888^{8}}$ $\sqrt[88]{88^{8}}$ $\sqrt[8]{8^{888}}$ $\sqrt[8]{\sqrt[8]{88^{8}}}$ $\left(\sqrt[8]{8^{8}}\right)^{88}$

Lösungen auf der nächsten Seite

Lösungen:
a) 2^{47} 1 0 2^{24}
$\sqrt[88]{88^8} < \sqrt[8]{\sqrt[8]{88^8}} < \sqrt[8]{888^8} < \sqrt[8]{88^{88}} < \left(\sqrt[8]{8^8}\right)^{88} < \sqrt[8]{8^{888}}$

Die folgenden Terme sind zu vereinfachen:

$\sqrt[3]{p^2} \cdot \sqrt[3]{p^4} = \sqrt[3]{p^6} = p^2$ P4

$4^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} = (4 \cdot 16)^{\frac{1}{3}} = \left(2^6\right)^{\frac{1}{3}} = 4$ P4

$3 \cdot \sqrt[3]{x^3 - \frac{19}{27}x^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{27}x^3} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x = 2x$

Bei den folgenden Beispielen ist ein Faktor vor die Wurzel zu bringen (teilweises Radizieren)
$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ allg. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{x}$ x = ?
$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{128}$ x = 128
Die folgende Gleichung stammt von Leonardo von Pisa (1220):
$\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{108}$
denn $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$ und $\sqrt[3]{108} = \sqrt[3]{27 \cdot 4} = 3 \cdot \sqrt[3]{4}$

Es folgen einige Beispiele mit Binomischen Formeln. Sie zeigen auch, dass die Idee der Substitution eine Vereinfachung bringen kann.

$\sqrt{\sqrt{13}+3} \cdot \sqrt{\sqrt{13}-3} = \sqrt{(a+3)\cdot(a-3)} = \sqrt{a^2-9} = \sqrt{13-9} = \sqrt{4} = 2$ mit $a = \sqrt{13}$

$\left(\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = a + b - 2\sqrt{ab} =$ mit $a = 7 + 2\sqrt{6}$ bzw. $b = 7 - 2\sqrt{6}$

$a + b - 2 \cdot \sqrt{(p+q)\cdot(p-q)} = a + b - 2 \cdot \sqrt{p^2 - q^2} = 4$ mit p = 7 bzw. q = $2\sqrt{6}$

$\left(\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^2 = 1$

$\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}\right)^2 = a + b$

$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b$

Ein aufwändigeres Beispiel:
$\frac{(a^{-3}b)^{-2}}{\sqrt{ab^3}} \div \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[6]{a^5b^5}}$
sei $u = \frac{(a^{-3}b)^{-2}}{\sqrt{ab^3}}$ und $v = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[6]{a^5b^5}}$
Zunächst können u und v vereinfacht werden:
$u = \frac{(a^{-3}b)^{-2}}{\sqrt{ab^3}} = \frac{a^6b^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{11}{2}}b^{-\frac{7}{2}}$
$v = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[6]{a^5b^5}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{5}{6}}} = a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{u}{v}=\frac{a^{\frac{11}{2}}b^{-\frac{7}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}}=a^6b^{-3}=\frac{a^6}{b^3}$$

Gleichungen mit Wurzeln

$x-4\sqrt{x}+3=0 \quad x=?$

Lösungsvariante 1: Wurzel isolieren, quadrieren

$4\sqrt{x}=x+3$ quadrieren $16x = x^2 + 6x + 9$ $x^2 - 10x + 9 = 0$

$x_1 = 1$ $x_2 = 9$ Scheinlösungen können durch die Probe eliminiert werden.

Lösungsvariante 2: Substitution

$z=\sqrt{x}$ $z^2-4x+3=0$ $z_1 = 1, z_2 = 3$ $x_1 = 1$ $x_2 = 9$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt[x]{3}=\sqrt[3]{9} \quad x=?$

$3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{3}}$ Gleichheit der Exponenten $\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$ $x=6$

In den folgenden Beispielen ist der Nenner rational zu machen

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ erweitern mit $\sqrt{3}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ erweitern mit $2-\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}$$

Richtig oder falsch?

$\frac{\sqrt{12}}{3-\sqrt{6}}=\sqrt{12}+\sqrt{8}$?

Lösung:

$$\frac{\sqrt{12}}{3-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{12}\cdot\left(3+\sqrt{6}\right)}{\left(3-\sqrt{6}\right)\cdot\left(3+\sqrt{6}\right)}=\frac{3\cdot\sqrt{12}+\sqrt{72}}{3}=\frac{3\cdot\sqrt{12}+3\sqrt{8}}{3}=\sqrt{12}+\sqrt{8}=2\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

Eine Knacknuss

Tipp: Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

Welches Resultat hat die folgende Rechnung:

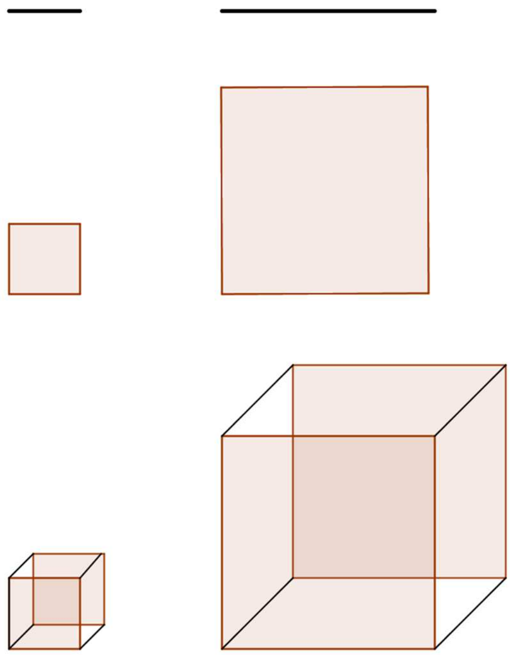
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots\ldots\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

Resultat: 48_9 (Neunersystem)

Zwei Anwendungen:

Die abbildung auf der rechten Seite illustriert den

Satz:
In ähnlichen Figuren verhalten sich Strecken wie k, Flächen wie k^2 und Volumen wir k^3.
(vgl. Kapitel Geometrie → Ähnlichkeit)



Romeo und Julia trinken zusammen ein Frappé aus einem kegelförmigen Glas der Tiefe h.
a)
Julia trinkt bis zur halben Tiefe und überlässt den Rest Romeo. In welchem Verhältnis wurde geteilt?

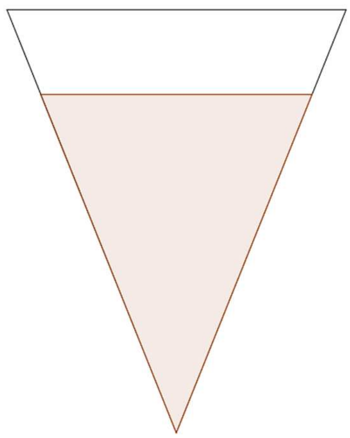
Die beiden Flüssigkeitskegel sind zueinander ähnlich.
In ähnlichen Figuren verhalten sich Strecken wie k, Flächeninhalte wie k^2, Volumina wie k^3.

Skizze: $k = 3$

Da Julia bis zur halben Höhe trinkt, bleibt Romeo $^1/_8$ des Volumens. Es wurde also im Verhältnis 7:1 geteilt.

b) Bis zu welcher Tiefe t darf Julia trinken, wenn beide gleich viel erhalten sollen?

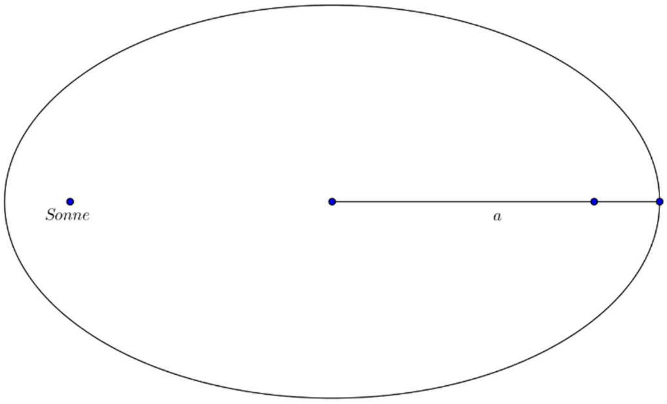
Bei gerechter Teilung ist das Volumen des verbleibenden Flüssigkeitskegels gerade halb so gross wie der Flüssigkeitskegel zu Beginn d.h. es gilt:
$k^3 = \frac{1}{2}$ und damit $k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0.8$.
Julia darf 20% hinunter trinken.



Keplersches Gesetz:
Joh. Kepler (1571-1630) entdeckte 1618, dass sich die Planeten auf Ellipsenbahnen bewegen. Die Sonne befindet sich in einem Brennpunkt der Ellipse. Gemäss dem 3. Keplerschen Gesetz gilt für die Umlaufszeiten T_1 und T_2 zweier Planeten um die Sonne und die grossen Halbachsen a_1 und a_2 der Bahnellipsen die Beziehung:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Berechne mit den folgenden Angaben die grosse Halbachse der Venusbahn:



grosse Halbachse der Erdbahn:
$a_E = 149.6$ Millionen km
Umlaufszeit der Erde:
$T_E = 365.3$ Tage
Umlaufszeit der Venus:
$T_V = 224.7$ Tage

$$a_V^3 = a_E^3 \cdot \left(\frac{T_V}{T_E}\right)^2$$

$$a_V = a_E \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_V}{T_E}\right)^2} = a_E \cdot \left(\frac{T_V}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a_E}{T_E^{\frac{2}{3}}} \cdot T_V^{\frac{2}{3}} \approx 2.9 \cdot T_V^{\frac{2}{3}} \approx 108.2 \text{ Millionen km}$$

grosse Halbachse der Venus: $a_V = 108.2 \cdot 10^6$ km

8. Potenzen mit reellen Exponenten

Eine irrationale Zahl kann durch eine Intervallschachtelung festgelegt werden. Damit können auch Potenzen mit irrrationalen Exponenten definiert werden. Es kann bewiesen werden, dass bei dieser Erweiterung die bisherigen Potenzgesetze gültig bleiben.

Beispiel:
$3.14156 < \pi < 3.14160$
$2^{3.14159} < 2^{\pi} < 2^{3.14160}$
$8.82496 < 2^{\pi} < 8.82503$
also $2^{\pi} \approx 8.82500$

Satz:
Es gibt zwei irrationale Zahlen a und b so, dass gilt: a^b ist rational.

Beweis:
Sei $q = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$
Fallunterscheidung:
1. q ist rational: wähle $a = b = \sqrt{2}$
2. q ist irrational: wähle $a = q \; und \; b = \sqrt{2}$, dann ist $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ rational.