Potenzen

1. Potenzen mit natürlichen Exponenten

$a^2 = a \cdot a$ Inhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge a
$a^3 = a \cdot a \cdot a$ Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge a

Allgemein definieren wir:

$a^1 = a$
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ Produkt von n Faktoren $a \epsilon R$, wobei $n \in N$, n > 2,
a heisst Basis, n Exponent, a^n n-te Potenz von a

Mathematiker ziehen die folgende rekursive Definition vor:

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^1 = a & \\ a^{n+1} = a \cdot a^n & a \in R,\ n \in N \end{array}}$$

a^n bedeutet also Produkt mit n Faktoren a
Im Gegensatz dazu bedeutet
$na = a + a + a + \ldots + a$ eine Summe mit n Summanden a.

In den folgenden Beispielen kommen häufig Potenzen vor, die kleiner als 100 sind:
Das „grosse Einmaleins“
$2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64\ ,\ 2^7 = 128\ ,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 512\ ,\ 2^{10} = 1024 \approx 1000$
$3^3 = 27,\ 3^4 = 81$
$4^3 = 64$
$5^3 = 125$

Mit Potenzen können „grosse“ Zahlen können gut dargestellt werden.

10^6 1 Million
$1\,000\,000\,000 = 10^9$ 1 Milliarde

Ein Vergleich (☺):
Eine Einfrankenmünze wiegt 4.4 Gramm. Würde ein Vermögen von 10 Milliarden Fr. in diesen Münzen ausbezahlt, so würde dies 45‘760 Tonnen entsprechen. Würde eine Arbeitnehmerin diese Frankenstücke vom Geldtransporter in die Villa des Investmentbankers transportieren, z.B. mit einer Leistung von 20 kg pro Minute, so wäre sie bei 8-Stunden-Arbeitstagen während 23 Jahren zu 200 Arbeitstagen unterwegs.

Zahlen werden oft im sogenannten wissenschaftlichen Format dargestellt:

300 000 km/h = $3 \cdot 10^8$ m/s	Lichtgeschwindigkeit
12 300 000 = $1.23 \cdot 10^7$	
$2^{30\,402\,457} - 1$	Primzahlrekordhalter (2006) mit 9 152 052 Ziffern
1 Mol: $6.022 \cdot 10^{23}$ Moleküle	Avogadrokonstante

Spezialfälle:

$0^n = 0$

$1^n = 1$

$(-1)^{2n} = 1$	gerader Exponent	aber $-1^{2n} = -1$
$(-1)^{2n-1} = -1^{2n-1} = -1$	ungerader Exponent	
$(-a)^{2n} = a^{2n} \neq -a^{2n}$	gerader Exponent	
$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$	ungerader Exponent	

Sofern keine Klammer angegeben ist, bezieht sich der Exponent nur auf die angegebene Basis.

Beispiele:

$2a^4 = 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$	$-2a^4 = -2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$
$(2a)^4 = 2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a = 16a^4$	$(-2a)^4 = (-2a) \cdot (-2a) \cdot (-2a) \cdot (-2a) = 16a^4$

Vorbereitende Beispiele zu den Potenzgesetzen:

$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^{3+4}$	P1
$\frac{a^6}{a^4} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^{6-4}$	P2
$(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 \cdot 3}$	P3
$(ab)^4 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a^4 b^4$	P4
$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$	P5

Allgemein gelten die folgenden 5 Potenzgesetze für a, b ∈ R, n, m ∈ N

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

P1
Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert,
indem man ihre Exponenten addiert (durch die Multiplikation mit a^m erhöht sich die Anzahl der Faktoren a um m).

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad a \neq 0$

P2

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert,
indem man ihre Exponenten subtrahiert.
Dieses Gesetz gilt zunächst nur, wenn der Zählerexponent grösser als der Nennerexponent ist (in diesem Fall können im Zähler m Faktoren a gekürzt werden).

$(a^n)^m = a^{nm}$

P3
Potenzen werden potenziert, indem man ihre Exponenten multipliziert (jeder der m Faktoren a^n besteht aus je n Faktoren a)

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

P4
Multiplizieren und Potenzieren sind vertauschbar (die n Faktoren ab können als ein Produkt von n Faktoren a und n Faktoren b aufgefasst werden).

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

P5

Dividieren und Potenzieren sind vertauschbar (die n Faktoren $\frac{a}{b}$ können im Zähler zu n Faktoren a und im Nenner zu n Faktoren b zusammengefasst werden.

Hingegen gilt: Addieren (oder Subtrahieren) und Potenzieren sind **nicht** vertauschbar

$(a+b)^n \neq a^n + b^n \qquad (3+4)^2 \neq 3^2 + 4^2$
$(a-b)^n \neq a^n - b^n \qquad (13-5)^2 \neq 13^2 - 5^2$ → Binomischer Lehrsatz

Beispiele:

$\frac{x^{2n}}{x^{n-1}} = x^{2n-(n-1)} = x^{n+1}$

$x^4 \cdot x = x^5$ P1

$\frac{48m^5}{12m^2} = 4m^3$ P2 P2

$32^{200} = (2^5)^{200} = 2^{1000}$ P3

Welche Zahl ist grösser 2^{1000} oder 10^{300} ?

$2^{1000} = (2^{10})^{100} = 1024^{100} > 1000^{100} = 10^{300}$ P3

$25^{400} 4^{400} = (25 \cdot 4)^{400} = 100^{400} = (10^2)^{400} = 10^{800}$ P3, 4

$\frac{48x^6 + 36x^3}{12x^5} = \frac{48x^6}{12x^5} + \frac{36x^3}{12x^5} = 4x + \frac{3}{x^2}$ denn $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ P3, 4, 5

$\frac{16^{300} \cdot 15^{300}}{30^{300}} = \left(\frac{16 \cdot 15}{30}\right)^{300} = 8^{300} = (2^3)^{300} = 2^{900}$ P3, 4, 5

Bei den folgenden Beispielen passieren hin und wieder Fehler:

$(-a^4)^3 = -a^{12}$ $(-a^3)^4 = a^{12}$ $(-a)^{3^4} = (-a)^{(3^4)} = -a^{81}$ $(-a)^{4^3} = (-a)^{(4^3)} = a^{64}$

Kommen Operationen 1. Stufe vor, so kann man allenfalls ausklammern:

$9 \cdot 2^5 + 7 \cdot 2^5 = 2^5 \cdot (9+7) = 16 \cdot 2^5 = 2^4 \cdot 2^5 = 2^9$ P1

$9 \cdot 2^n + 7 \cdot 2^n = 2^n \cdot (9+7) = 16 \cdot 2^n = 2^4 \cdot 2^n = 2^{n+4}$ P1

Der folgende Term kann gekürzt werden:

$\frac{a^k - a^{k+1}}{a^k - a^{k-1}} = \frac{a^k \cdot (1-a)}{a^{k-1} \cdot (a-1)} = -a$ P1, 2

Erweitern, Hauptnenner c^n

$\frac{1+c}{c^n} - \frac{1-c}{c^{n-1}} - \frac{1}{c^{n-2}} = \frac{1+c}{c^n} - \frac{c \cdot (1-c)}{c \cdot c^{n-1}} - \frac{1 \cdot c^2}{c^2 \cdot c^{n-2}} =$

$\frac{1+c-c \cdot (1-c) - c^2}{c^n} = \frac{1}{c^n}$ P1

Aufgaben mit Binomischen Formeln

$(\sqrt{3}+1)^4 \cdot (\sqrt{3}-1)^4 = (3-1)^4 = 2^4$ 3. Binomische Formel P4

Summandenweise dividieren oder im Zähler b^{n-1} ausklammern!

$\frac{b^{n+1} - 4b^n + 4b^{n-1}}{b^{n-1}} = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2$ P2

Im folgenden Beispiel den zweiten Faktor mit 2 erweitern

$\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^3 \left(\frac{ab}{\frac{a+b}{2}}\right)^3 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{(a^2-b^2)}{ab} \cdot \frac{2ab}{a+b}\right)^3 = (a-b)^3 \neq a^3 - b^3$ P4

Aufgabe:
Es ist die folgende Identität zu beweisen:
$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2$

Zum Beweis kann man etwa zeigen, dass sich die linke Seite der Gleichung in die rechte überführen lässt.
$L = (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = R$

Wählt man für p und q verschiedene natürliche Zahlen, so liefert die Identität die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit ganzzahligen Seitenlängen (pythagoräisches Dreieck).

$p = 2, q = 1$ $\quad$ $3^2 + 4^2 = 5^2$
$p = 3, q = 2$ $\quad$ $5^2 + 12^2 = 13^2$

Eine Frage:
Kann $a^2 + b^2$ in ein Produkt zerlegt werden?

Antwort ja
$a^2 + b^2 = (|a| + |b| + \sqrt{2|ab|}) \cdot (|a| + |b| - \sqrt{2|ab|})$
z.B. $4^2 + 8^2 = (12 + \sqrt{64}) \cdot (12 - \sqrt{64}) = 20 \cdot 4$

Übungsaufgaben:

1.
Die folgenden Potenzen sind der Grösse nach zu ordnen (ohne TR)
$9^{12},\ 27^7,\ 81^2,\ 3^{10},\ 243^3,\ 3^{(3^3)}$
2.
Der folgende Term ist zu vereinfachen
$\frac{3^n\left(\frac{1}{3} \cdot 3^n - 3^{n-2}\right)}{3^{2n}}$
Lösungen:
1.
$81^2 = 3^8 < 3^{10} < 243^3 = 3^{15} < 27^7 = 3^{21} < 9^{12} = 3^{24} < 3^{(3^3)} = 3^{27}$
2.
$\frac{2}{9}$