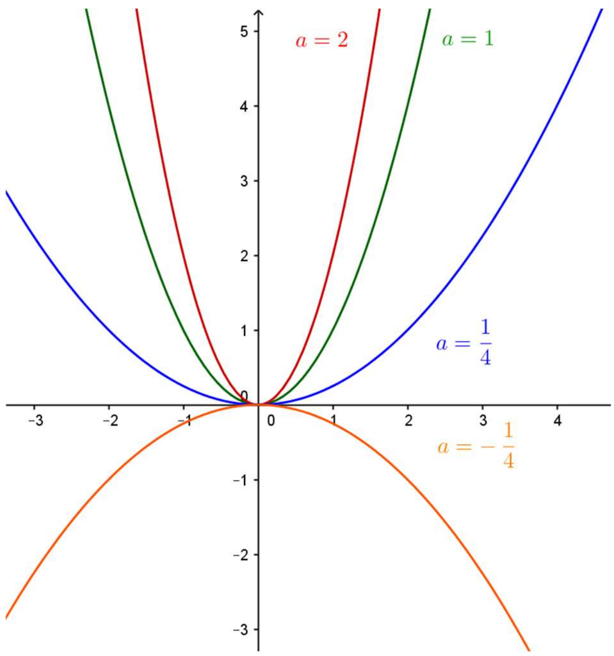
01 Der Graph einer quadratischen Funktion

Aus dem Kapital Funktionen sind lineare Funktionen $y = f\ (x) = ax + b$ bekannt.
Ihr Graph ist eine Gerade mit der Steigung a und dem y-Achsenabschnitt b. Sie schneidet die x-Achse für $a \neq 0$ an der Stelle $x = -\frac{b}{a}$.
In diesem Abschnitt sind quadratische Funktionen: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ das Thema.
Ihr Graph heisst sofern a ≠ 0 Parabel.
Zunächst wird der Einfluss der Parameter a, b, c auf Lage und Form der Parabel untersucht.
Aus der sogenannten Scheitelgleichung $f: x \mapsto y = a \cdot (x - u)^2 + v$ lässt sich dann unmittelbar die Auflösungsformel für die quadratische Gleichung (hin und wieder als Mitternachtsfomel bezeichnet) herleiten.

Spezialfälle:

a)
$f: x \mapsto y = ax^2$ Skizze: $a\ =\ 1, 2\ , \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$



> Satz:
> Der Graph der Funktion
> $f: x \mapsto y = ax^2 \quad a \neq 0$
> (Die Kurve mit der Gleichung $y = ax^2$) ist eine quadratische Parabel. Die y-Achse ist Symmetrieachse, der Nullpunkt Scheitelpunkt der Parabel. Die Parabel ist für a > 0 nach oben, für a < 0 nach unten geöffnet. Der Parameter a bewirkt eine Dehnung oder Pressung der Ursprungsparabel $y = x^2$ in y-Richtung im Verhältnis $a : 1$ (so genannte **normale Affinität zur x-Achse**).

Hinweis:
Eine Ellipse ist das normalaffine Bild eines Kreises.

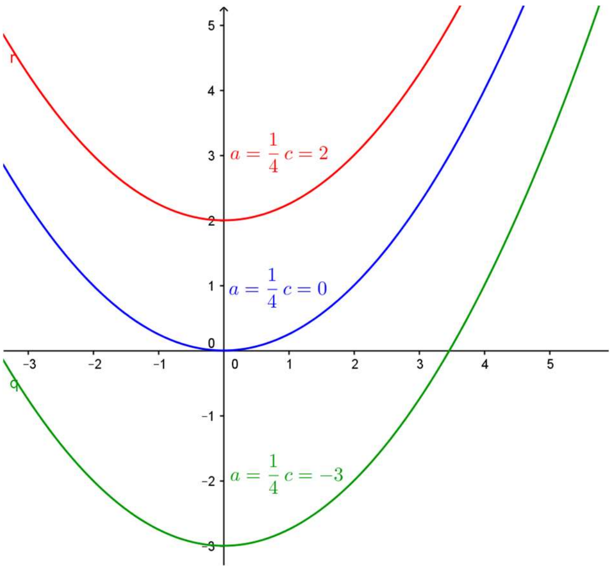
Aufgabe:
Für welchen Wert des Parameters a geht die Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = ax^2$ durch den Punkt Q(-3, 6) ?

Lösung
Die Koordinaten des Punktes Q erfüllen die Kurvengleichung:
Wegen $f(-3) = 6$ gilt $6 = 9a$ oder also $a = \frac{2}{3}$

b)

$f: x \mapsto y = ax^2 + c \qquad a, c \in R, a \neq 0$

Skizze: $a = \frac{1}{4} \quad c = 0, -3, 2$



Satz: Der Graph der Funktion $f: x \mapsto y = ax^2 + c$ ist eine zur y-Achse symmetrische Parabel mit dem Scheitel $S(0, c)$. Sie entsteht aus der Parabel $y = ax^2$ durch **Translation um den Vektor** $\boldsymbol{\binom{0}{c}}$

Allgemein gilt:
Wird zu einer Funktion eine Konstante addiert, so bewirkt dies eine Verschiebung des Graphen in y-Richtung.

Die Frage nach den Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto y = ax^2 + c$
führt auf die reinquadratische Gleichung $ax^2 + c = 0$.
Dividiert man diese Gleichung durch $a \neq 0$ so erhält man $x^2 = -\frac{c}{a} = d$
Aus der Abbildung ist zu erkennen, dass je nach dem Wert von d drei verschiedene Fälle auftreten können. Die Parabel kann die x-Achse schneiden, berühren oder meiden.

Beispiele:

$x^2 = 9$	$x^2 - 9 = (x-3) \cdot (x+3) = 0$	$x_1 = 3$	$x_2 = -3$ oder $\lvert x \rvert = 3$
$x^2 = 3$	$(x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) = 0$	$x_1 = \sqrt{3}$	$x_2 = -\sqrt{3}$ oder $\lvert x \rvert = \sqrt{3}$
$x^2 = 0$		$x_{1,2} = 0$	
$x^2 = -1$		keine reelle Lösung (das Quadrat einer reellen Zahl kann nicht negativ sein).	

Die folgenden Fragestellungen sind zu unterscheiden:

a) Welche Lösungen hat die Gleichung $x^2 = 9$?
Antwort: $x_1 = \sqrt{9} = 3$ und $x_1 = -\sqrt{9} = -3$

b) Was bedeutet $\sqrt{9}$ oder $\sqrt{(-3)^2}$?
Antwort: nur +3 (und nicht auch -3).

Allgemeine Definition: Ist a ≥ 0, dann bedeutet $\sqrt{a}$ diejenige **nicht negative** Zahl, deren Quadrat a ist.

Satz: Die quadratische Gleichung $x^2 = d$, $d \in R$ hat für		
d > 0	zwei verschiedene reelle Lösungen	$x_1 = \sqrt{d}$ und $x_2 = -\sqrt{d}$
d = 0	die Lösung	x = 0 (auch Doppellösung genannt)
d < 0	keine reelle Lösung	

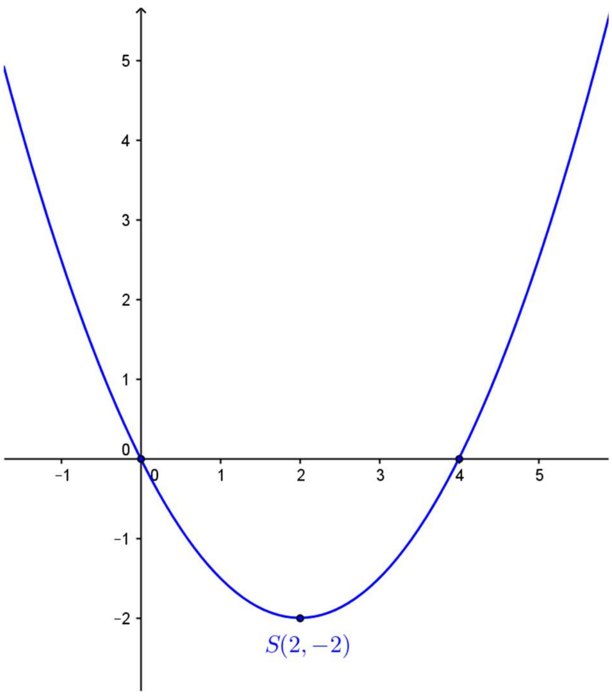
(*) Ein Reaktionstest
Der Schüler hält einen Massstab am Skalenende in die Höhe. Eine Schülerin hält Daumen und Zeigefinger am Anfang der Skala. Lässt der Schüler den Massstab ohne Vorwarnung los, so versucht die Schülerin so schnell als möglich den Massstab zu packen. Anschliessend wird abgelesen, welche Zahl auf der Skala über dem Zeigefinger der Schülerin steht. Aus dieser Zahl kann nach dem Fallgesetz $s = \frac{1}{2} gt^2$ die Reaktionszeit der Schülerin berechnet werden.

Hat der Massstab z.B. 0.2 Meter zurückgelegt, dann gilt nach dem Fallgesetz für die Reaktionszeit t: $0.2 \approx 5t^2$. Daraus ergibt sich eine Reaktionszeit von
$t \approx \sqrt{0.04} \approx 0.2$ Sekunden.
Diese kurze Reaktionszeit ist allerdings nur möglich, wenn man auf das Ereignis vorbereitet ist.

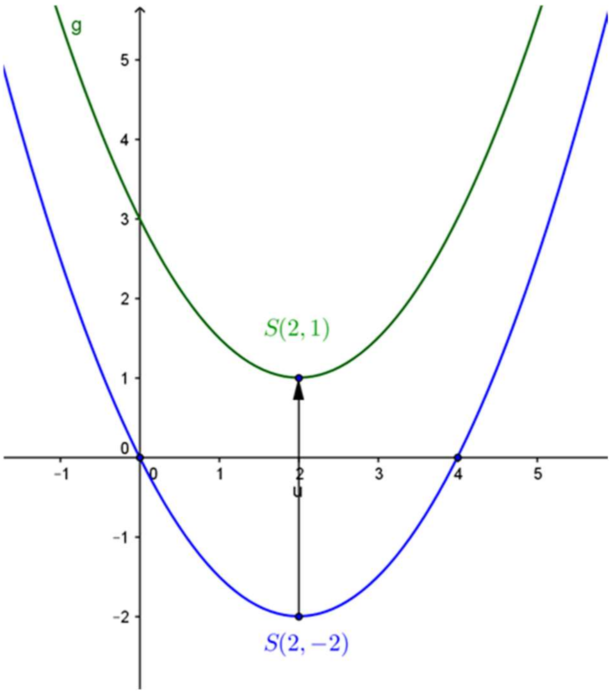
c)
$f: x \mapsto y = ax^2 + bx = x(ax + b) \quad a, b \in R, a \neq 0$

In diesem Fall können die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse unmittelbar angegeben werden:
$x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$
Aus Symmetriegründen liegt der Scheitel folglich in der Mitte an der Stelle $u = -\frac{b}{2a}$.
Die y-Koordinate v des Scheitels ergibt sich dann aus der Funktionsgleichung zu $v = f(u)$.

Abbildung : $a = \frac{1}{2}, b = -2$
Scheitel $S(2, -2)$ denn
$u = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{1} = 2$ und $v = f(2) = -2$.



d) Allgemeiner Fall
$f: x \mapsto y = ax^2 + bx + c$
Mit c) ist die x-Koordinate u des Scheitels auch im allgemeinen Fall bekannt, denn der zusätzliche Summand c verändert nur die y- Koordinate des Scheitels.



Beispiel:
$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$
$a = \frac{1}{2}, b = -2, \ c = 3$
Die Parabel entsteht aus der Parabel von Beispiel c) durch eine Translation um 3 in y-Richtung.

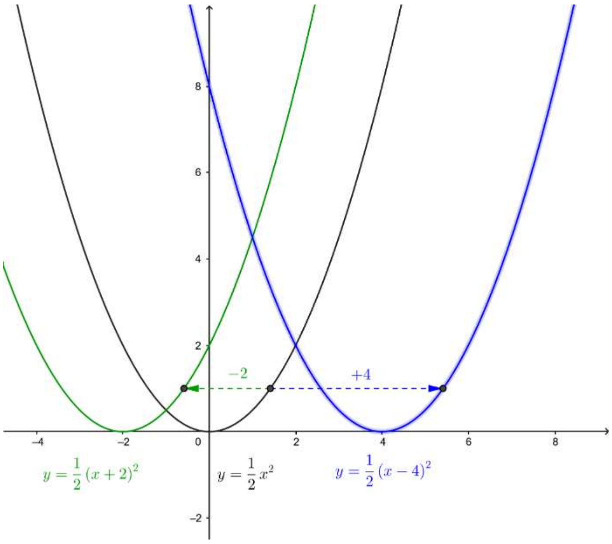
Die Funktionsgleichung kann durch quadratische Ergänzung folgendermassen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 4x + 4) + 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x - 2)^2 + 1 \end{aligned}$$

In dieser Form sind die Scheitelkoordinaten $S(2, 1)$ direkt zu erkennen.

Satz 1:
Der Graph der Funktion $f: x \mapsto y = ax^2 + bx + c$ ist eine **Parabel mit dem Scheitel** $\boldsymbol{S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)}$**.** Sie geht aus der Ursprungsparabel mit der Gleichung $y = ax^2$ durch eine Translation hervor. Für a > 0 ist sie nach oben, für a < 0 nach unten geöffnet.

f)
$f: x \mapsto y = a \cdot (x-u)^2 \qquad a, u \in R, a \neq 0$
Abbilddung: $a = \frac{1}{2} \quad u = 0, 4, -2$



Satz: Der Graph der Funktion $f: x \mapsto y = a \cdot (x-u)^2$ entsteht aus der Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ durch Verschiebung in x-Richtung um den Vektor $\binom{u}{0}$. Ihr Scheitel liegt im Punkt $S(u, 0)$.

Allgemein gilt:
Ersetzt man in einer Funktionsgleichung x durch $x - u$ und y durch $y - v$, so bedeutet dies eine Verschiebung des Graphen um den Vektor $\binom{u}{v}$.
Ist u > 0: dann handelt es sich um eine Verschiebung in positiver x-Richtung, für u < 0 in negativer x-Richtung.

g) Kombiniert man die beiden Abbildungen in b) und f) so gilt der folgende Satz:

Satz 2: Der Graph der Funktion $f: x \mapsto y = a \cdot (x-u)^2 + v \qquad a, u, v \in R, a \neq 0$ ist eine Parabel. Sie geht aus der Ursprungsparabel mit der Gleichung $y = ax^2$ durch eine **Verschiebung um den Vektor** $\binom{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{v}}$ hervor. Für a > 0 ist sie nach oben, für a < 0 nach unten geöffnet.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Parabelgleichungen ergibt sich durch Ausmultiplizieren der 2. Gleichung

$y = a \cdot x^2 \quad + bx + \quad c$ $\qquad$ $y = a \cdot x^2 \quad + \; bx + \; c$

$y = a \cdot (x-u)^2 + v$ $\qquad$ $y = a \cdot x^2 \quad - \; 2aux + \; au^2 + v$

Die beiden Gleichungen können nur dann die gleiche Funktion beschreiben, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen:

$b = -2au$ und damit $u = -\frac{b}{2a}$

$c = au^2 + v$ oder $v = c - au^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a}$

Also gilt:

Satz:
Der Graph der Funktion $f: x \to y = f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$
ist eine Parabel mit dem Scheitel

$$S\left(u = -\frac{b}{2a}, v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

Sie geht aus der Ursprungsparabel mit der Gleichung $y = ax^2$ durch eine Translation um den Vektor $\binom{u}{v}$ hervor. Für a > 0 ist sie nach oben, für a < 0 nach unten geöffnet.

Die Darstellung der Parabel in der folgenden Form heisst Scheitelpunktsgleichung:

$y = a \cdot (x-u)^2 + v$

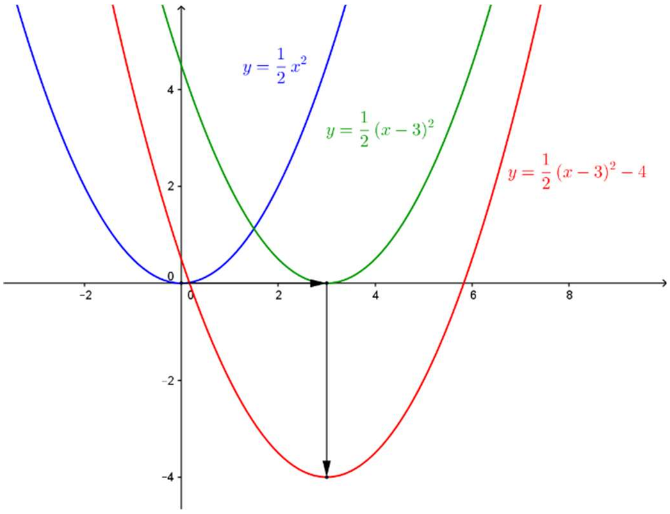
$u = -\frac{b}{2a}$ $\qquad$ $v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac-b^2}{4a}$ $\qquad$ **Scheitelpunktsgleichung**

Bemerkung:
Die Form der Parabel wird also allein durch den Wert des Parameters a bestimmt, b bzw. c bestimmen die Lage der Parabel im Koordinatensystem.

Aufgabe:
Gesucht ist der Scheitel der Parabel mit der Gleichung
$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$

$u = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{1} = 3$
$v = f(3) = -4$
$y = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 - 4.$

Die Parabel entsteht aus der Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2$ durch eine Parallelverschiebung um 3 Einheiten in positiver x-Richtung und um 4 Einheiten in negativer y-Richtung.



Herleitungsvarianten:
1.
Üblicherweise wird die Scheitelgleichung mit einigem Rechenaufwand durch quadratische Ergänzung bestimmt.

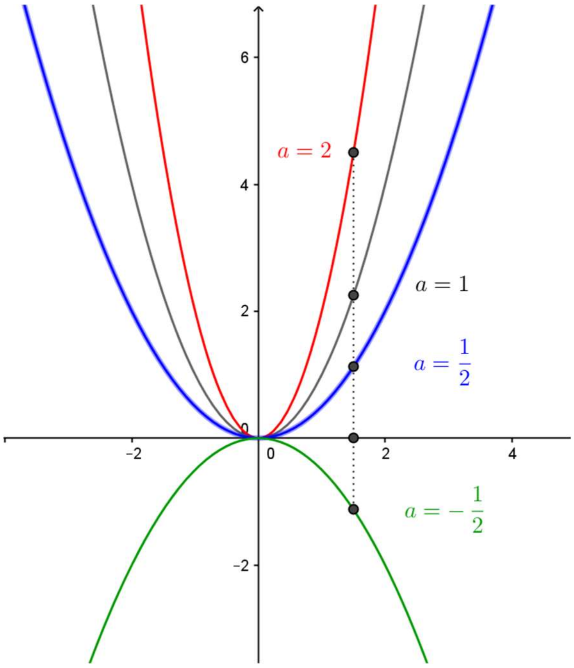
2.
Die Bestimmung der Steigung eines Funktionsgraphen wird in der Differentialrechnung allgemein gelöst.

Übungsaufgabe:
Gesucht ist der Scheitel der Parabel
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$

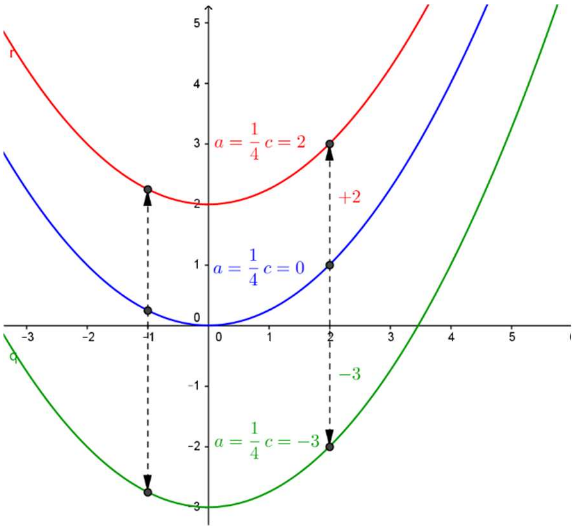
Lösung:
Scheitel $S(-1, -2)$ $\quad y = -\frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 - 2$)

Zusammenfassung: Quadratische Funktionen und ihre Graphen

$y = ax^2 \quad a = 1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

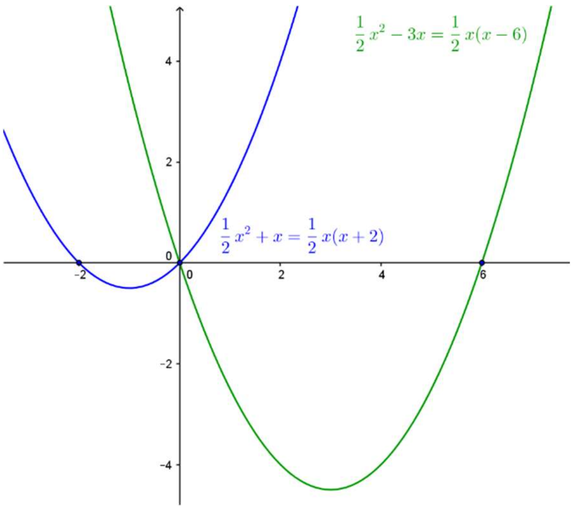


$y = ax^2 + c \quad a = \frac{1}{4} \quad c = 0,\ 2,\ -3$



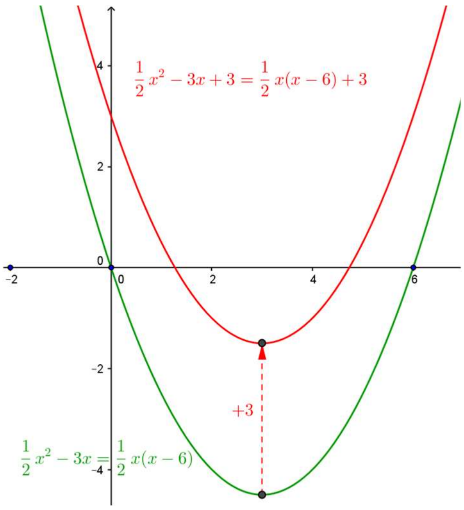
$y = ax^2 + bx = x(ax + b) = ax\left(x + \frac{b}{a}\right)$

$a = \frac{1}{2} \quad b = 1, -3$



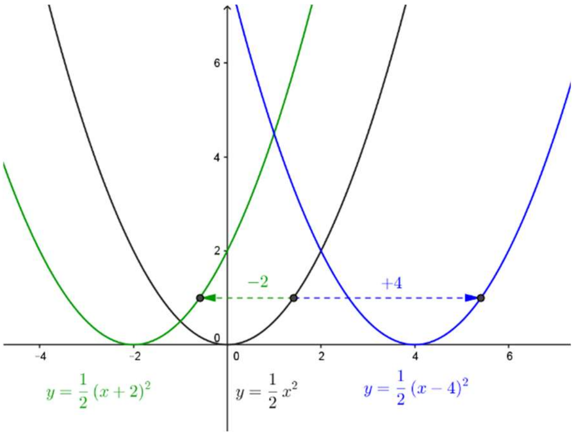
$y = ax^2 + bx + c = ax\left(x + \frac{b}{a}\right) + c$

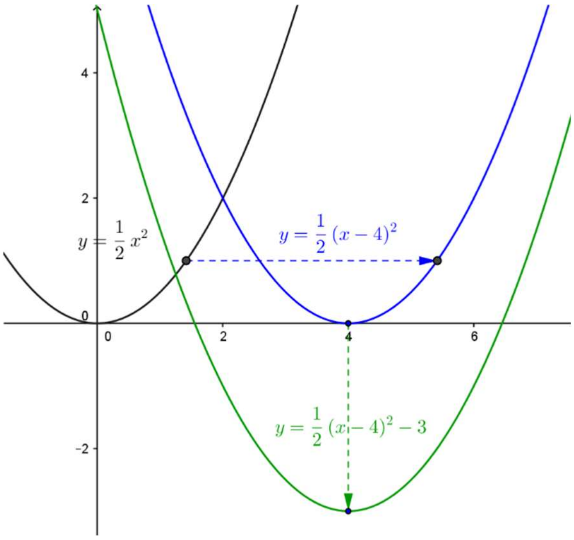
$a = \frac{1}{2} \quad b = -3 \quad c = 3$



$y = a(x-u)^2$
$a = \frac{1}{2} \quad u = 0, -2, \ 4$

$y = a(x-u)^2 + v$
$a = \frac{1}{2} \quad u = 4 \quad v = 3$





Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass sich aus der Scheitelpunktsgleichung unmittelbar die quadratische Auflösungsformel (Mitternachtsformel) ergibt.