

03 Beispiele zur Mitternachtsformel

a)

$$4x^2 = 17x - 15$$

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

auf die Normalform bringen

$$a = 4 \quad b = -17 \quad c = 15$$

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 49$$

$$\text{Lösungen: } x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 3$$

Die Lösungen können durch Einsetzen überprüft werden.

b)

$$-2x^2 = 3 - 7x$$

$$2x^2 + 7x + 3 = 0$$

mit (-1) multiplizieren und ordnen

$$D = 25$$

Lösungen:

$$x_1 = -\frac{5}{4} \quad x_2 = -3$$

c)

$$y^2 + 6y + 4 = 0$$

$$D = 20$$

Lösungen:

$$y_1 = -3 - \sqrt{5} \quad y_2 = -3 + \sqrt{5}$$

d)

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$D = 0$$

Lösung:

$$x_{1,2} = 4$$

Lösungsvariante: ausklammern.

e)

$$x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$D = -28 < 0$$

keine reelle Lösung

f)

$$0.235x^2 + 1.41x - 3.14 = 0$$

$$D \approx 4.94 \quad x_1 \approx 1.73 \quad x_2 \approx -7.73$$

In den beiden folgenden Beispielen ist das Anwenden der Auflösungsformel nicht empfehlenswert.

g)

$$x^2 - 25 = 0$$

$$D = 100$$

Lösungen

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -5$$

Lösungsvariante: zerlegen:

$$(x - 5) \cdot (x + 5) = 0$$

h)

$$2x^2 = 7x$$

Dividiert man durch x , so geht die Lösung $x = 0$ verloren.

Korrektes Vorgehen:

$$2x^2 - 7x = 0$$

$$D = 49$$

Lösungen:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{7}{2}$$

Lösungsvariante: faktorisieren

$$x \cdot (2x - 7) = 0$$

i)

$$\frac{3x-4}{x-4} = 9 - \frac{x-2}{2}$$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren ($x \neq 4$) und vereinfachen

$$x^2 - 18x + 72 = (x-6) \cdot (x-12) = 0 \quad D = 36$$

$$\text{Lösungen:} \quad x_1 = 6 \quad x_2 = 12$$

Ein Beispiel mit einem Parameter

$$x^2 + q \cdot x - 2q^2 = 0 \quad a = 1 \quad b = q \quad c = -2q^2$$

$$D = 9q^2$$

Lösungen:

$$x_1 = -2q \quad x_2 = q$$

Variante: Ausklammern

$$(x+2q) \cdot (x-q) = 0$$

Ein schwierigeres Beispiel:

$$\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = 3x-1$$

$$x \neq 2, x \neq -2$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Hauptnenner $x^2 - 4 = (x-2) \cdot (x+2)$ so erhält man eine Gleichung 3. Grades, die aber in Faktoren zerlegt werden kann:

$$3x^3 - x^2 - 10x = x \cdot (3x^2 - x - 10) = 0$$

$$\text{Lösungen:} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{5}{3} \quad (x_3 = 2)$$

Nur x_1 und x_3 sind Lösungen der Ausgangsgleichung, x_2 ist durch die Multiplikation mit $x^2 - 4$ hinzugekommen.

Lösungsvariante: linke Seite vereinfachen.

$$\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = \frac{8}{x^2-4} - \frac{2 \cdot (x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4-2x}{x^2-4} = \frac{2(2-x)}{(x-2)(x+2)} = -\frac{2}{x+2}$$

Die Gleichung lautet damit

$$-\frac{2}{x+2} = 3x-1$$

oder nach Multiplikation mit dem Nenner

$$(1-3x)(x+2) = 2$$

Da rechts nicht 0 steht, wird man ausmultiplizieren

$$3x^2 + 5x = x(3x+5) = 0$$

$$\text{Lösungen:} \quad x_1 = 0 \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

In einfachen Fällen gelingt das Faktorisieren auch bei Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

Beispiele:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$ $(x - 4) \cdot (x - 3) = 0$ $x_1 = 4$ $x_2 = 3$

Es ist die folgende Sprechweise gebräuchlich:

Der quadratische Term kann in die Linearfaktoren $(x - 4)$ und $(x - 3)$ zerlegt werden.

b) $x^2 + 5x + 6 = 0$ $(x + 2) \cdot (x + 3) = 0$ $x_1 = -2$ $x_2 = -3$

c) $x^2 - x - 6 = 0$ $(x + 2) \cdot (x - 3) = 0$ $x_1 = -2$ $x_2 = 3$

d) $x^2 + x - 12 = 0$ $(x + 4) \cdot (x - 3) = 0$ $x_1 = -4$ $x_2 = 3$

Bestimmung der Lösungen in den 3 Fällen mit Excel

Quadratische Auflösungsformel				
Version 1				
a		b		c
0.235	$x^2 +$	1.41	$x +$	$-3.14 = 0$
D =	4.9397			
2 Lösungen				
	$x_1 = 1.732$			
	$x_2 = -7.732$			
a		b		c
1	$x^2 +$	1	$x +$	$1 = 0$
D =	-3			
keine Lösung				
a		b		c
1	$x^2 +$	-2	$x +$	$1 = 0$
D =	0			
1 Lösung				
	$x = 1.00$			(ac)