04 Biquadratische Gleichungn, Wurzelgleichungen

4.1 Eine Substitution führt auf eine quadratische Gleichung

Wie im folgenden Beispiel kann hin und wieder eine kompliziert scheinende Gleichung durch Einführen einer Hilfsvariablen (durch eine Substitution) auf eine einfachere zurückgeführt werden.

$$\left(\frac{3x+1}{x-3}\right) + 5\left(\frac{x-3}{3x+1}\right) = 6$$

Die Substitution: $z = \frac{3x+1}{x-3}$
führt auf die quadratische Gleichung
$z + \frac{5}{z} = 6$ bzw. $z^2 - 6z + 5 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 5$ und $z_2 = 1$.
Macht man die Substitution rückgängig, so erhält man wegen
$\frac{3x+1}{x-3} = 5$ bzw. $\frac{3x+1}{x-3} = 1$ die Lösungen $x_1 = 8$ und $x_2 = -2$.

4.2 Biquadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$ heissen biquadratische Gleichungen. Sie können durch die Substitution $z = x^2$ in quadratische Gleichungen übergeführt werden.

Beispiele:
a)

$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$		Substitution: $z = x^2$
$z^2 - 6z + 8 = (z-2)(z-4) = 0$		mit den Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = 4$
$z = 4$	$x^2 = 4$	$x_1 = 2$ und $x_2 = -2$
$z = 2$	$x^2 = 2$	$x_3 = \sqrt{2}$ und $x_4 = -\sqrt{2}$

b)

$x^5 - 3x^3 - 28x = 0$		ausklammern
$x(x^4 - 3x^2 - 28) = 0$		Lösung $x_1 = 0$
		Substitution: $z = x^2$
$z^2 - 3z - 28 = (z-7)(z+4) = 0$		mit den Lösungen $z_1 = 7$ und $z_2 = -4$
$z = 7$	$x^2 = 7$	$x_1 = \sqrt{7}$ und $x_2 = -\sqrt{7}$
$z = -4$	$x^2 = -4$	keine weiteren Lösungen, denn das Quadrat einer reellen Zahl ist nicht negativ.

Übungsaufgabe:
$3x^4 - 10x^2 + 3 = 0$
Lösungen: $\pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bemerkung:
Es kann bewiesen werden, dass eine Gleichung n-ten Grades höchstens n reelle Lösungen hat. Für Gleichungen 3. und 4. Grades existieren noch Auflösungsformeln, die aber eher von theoretischem Interesse sind. Für Gleichungen von mindestens 5. Grad gibt es keine allgemeinen Lösungsformeln. In der Praxis wendet man Näherungsverfahren wie z.B. das von Newton an: http://mathekurs.ch/mk/files/analysis/newtonverf.pdf.

4.3 Wurzelgleichungen

Beispiele:
a)
$3 + \sqrt{2x-3} = x$

Ein Irrweg:
Quadriert man diese Gleichung, so fällt die Wurzel w wegen $(3+w)^2 \neq 9 + w^2$nicht weg.
Deshalb ist die Wurzel erst zu isolieren, erst dann wird die Gleichung quadriert.

$\sqrt{2x-3} = x - 3$ quadrieren
$2x - 3 = x^2 - 6x + 9$ oder
$x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2) = 0$
mit den Lösungskandidaten $x_1 = 6$ und $x_2 = 2$.
$x_1 = 6$ erfüllt die Wurzelgleichung, die Scheinlösung $x_2 = 2$ hingegen nicht.

Die geringfügig abgeänderte Wurzelgleichung
$3 + \sqrt{2x-3} = x$ führt auf dieselbe quadratische Gleichung.
In diesem Fall ist $x_2 = 2$ Lösung, $x_1 = 6$ hingegen nicht.

Wurzelgleichungen können durch Quadrieren gelöst werden.

Wie auch die folgenden Beispiele zeigen, ist das Quadrieren keine Äquivalenzumformung. Es können Scheinlösungen dazukommen. Eine Probe ist deshalb unerlässlich.

b)
$\sqrt{2x+5} - \sqrt{4x-4} + 1 = 0$ Wurzeln trennen
$\sqrt{2x+5} + 1 = \sqrt{4x-4}$ quadrieren
$2x + 5 + 2\sqrt{2x+5} + 1 = 4x - 4$
$2\sqrt{2x+5} = 2x - 10$ beide Seiten durch gemeinsame Faktoren dividieren
$\sqrt{2x+5} = x - 5$ quadrieren
$x^2 - 12x + 20 = (x-10)(x-2) = 0$
$x_1 = 10$ ist Lösung $x_2 = 2$ hingegen nicht.

c)
Ein Beispiel, 4 Lösungswege
$\sqrt{x} - 2x + 3 = 0$

1) rechnerische Lösung Wurzel isolieren

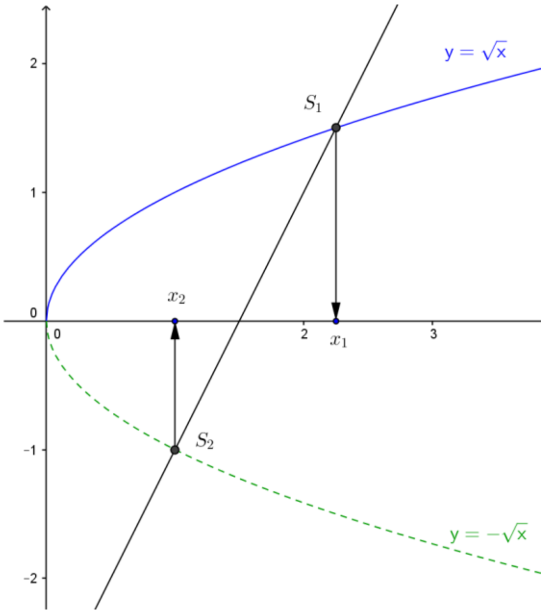
$\sqrt{x} = 2x - 3$ quadrieren
$4x^2 - 13x + 9 = 0$ $D = 25$
Lösung: $x_1 = \frac{9}{4}$ $x_2 = 1$ hingegen nicht.

2) Lösung durch Substitution:

Die Substitution $z = \sqrt{x}$ führt auf die quadratische Gleichung
$2z^2 - z - 3 = (2z-3)(z+1) = 0$ mit den Lösungen $z_1 = \frac{3}{2}$ $z_2 = -1$

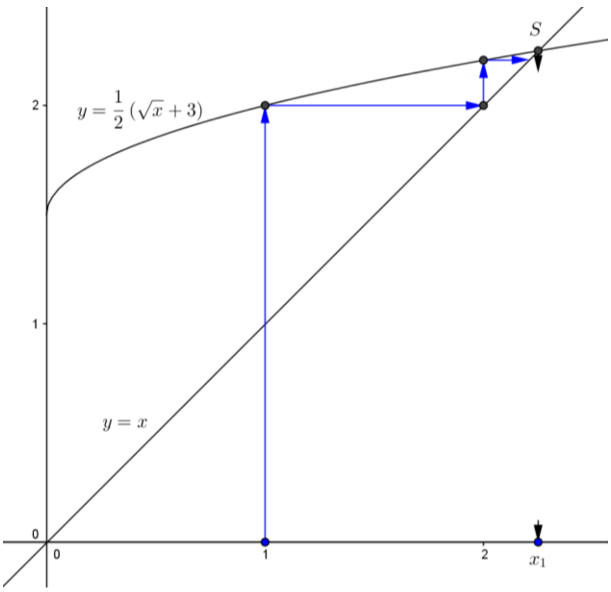
Die Gleichung $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ hat die Lösung $x_1 = \frac{9}{4}$ (Probe)
Die Gleichung $\sqrt{x} = -1$ hat keine reelle Lösung, denn eine Wurzel kann nicht negativ sein.

3) graphische Lösung



Auf der linken Seite der Gleichung
$\sqrt{x} = 2x - 3$ steht
die Wurzelfunktion $h(x) = \sqrt{x}$,
auf der rechten die lineare Funktion
$g(x) = 2x - 3$.
Die x-Koordinate des Schnittpunkts S_1 der beiden Graphen liefert die Lösung der Gleichung, denn im Schnittpunkt der beiden Kurven stimmen die beiden y-Koordinaten überein, d.h. für diese x-Werte ist die Gleichung erfüllt. Die x-Koordinate des zweiten Schnittpunkts $S_2(1, -1)$ ist die Lösung der Gleichung
$-\sqrt{x} = 2x - 3$.

4) Lösung der Gleichung durch Iteration



Die Gleichung ist zunächst in die Form
$x = f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + 3\right)$ zu bringen.
In der Abbildung sind die Graphen der beiden Funktionen $g(x) = x$ und
$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + 3\right)$ dargestellt.
Eine 1. Näherungslösung z.B. $x_1 = 1$ kann nun schrittweise mit dem folgenden Algorithmus verbessert werden (Iteration)
Geometrische Interpretation:
Der Schnittpunkt S wird durch den blau gefärbten Streckenzug schrittweise angenähert.

Algorithmus:
Wähle eine 1. Näherungslösung zB. $x_1 = 1$
Wiederhole bis die Abbruchbedingung erfüllt ist:

Ziehe die Quadratwurzel aus der bisherigen Näherungslösung, addiere 3 und halbiere
$\rightarrow$ nächste Näherungslösung.

Damit ergeben sich die folgenden Näherungswerte:
$x_1 = 1 \rightarrow x_2 = 2 \rightarrow x_3 \approx 2.207 \rightarrow x_4 \approx 2.2428 \rightarrow \ldots \rightarrow x_9 \approx 2.249999\ldots$

Die Idee, die Lösung eines Problems in Schritten zu finden, ist in der angewandten Mathematik, Informatik sehr wichtig. Solche Verfahren heissen Iterationsverfahren.
Siehe dazu: Analysis 2$\rightarrow$ Numerische Verfahren