

10 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen können gelöst werden, indem man die zugehörige quadratische Funktion betrachtet. Die Lösungsmenge ergibt sich dann, indem man die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse bestimmt und deren Öffnung berücksichtigt.

Illustration an Beispielen:

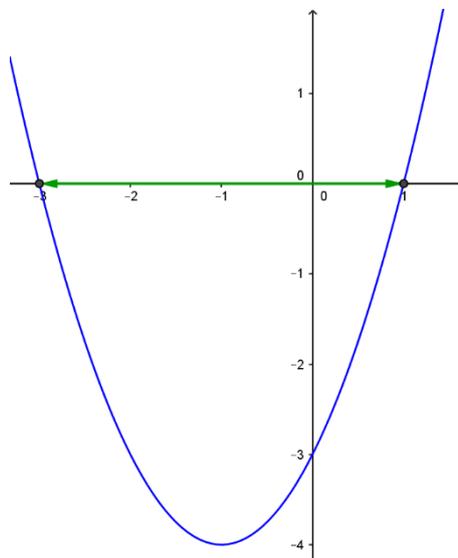
a) $x^2 + 2x - 3 < 0$

Der Graph der zugehörigen quadratischen Funktion

$$f: x \rightarrow y = x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

ist eine nach oben geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$ schneidet. Die Parabel verläuft im Intervall $] -3, 1[$ unterhalb der x-Achse, das heisst dort gilt $f(x) < 0$.

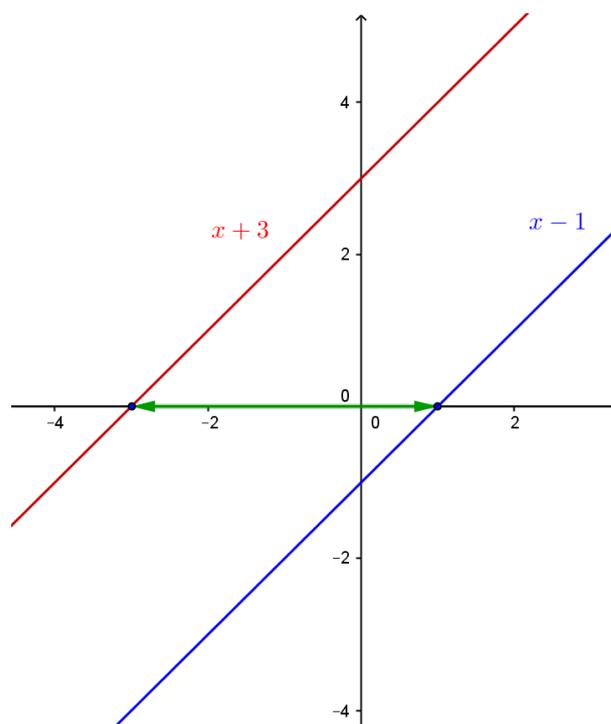
Die Ungleichung hat die Lösungsmenge $L =] -3, 1[$.



Lösungsvariante:

Die Lösungsmenge L kann auch mit einer Fallunterscheidung gelöst werden. L besteht aus den reellen Zahlen für die einer der Faktoren negativ und der andere positiv ist.

Zu Lösungsmenge gehören die x-Werte, für die $x + 3$ und $x - 1$ verschiedene Vorzeichen haben. Dies ist im Intervall $L =] -3, 1[$ der Fall



Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen:

Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn man

- auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert (subtrahiert)
- beide Seiten mit derselben positiven Zahl multipliziert.

b)

$$-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \leq 0$$

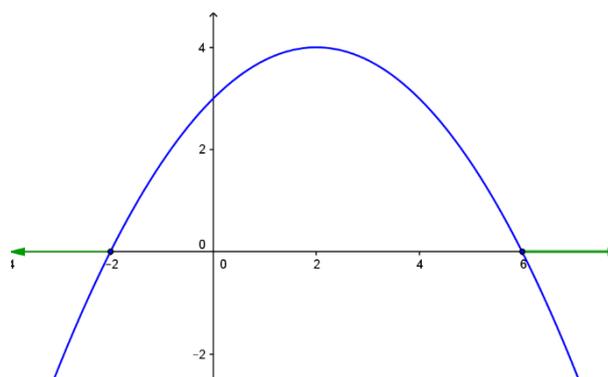
Der Graph der zugehörigen quadratischen Funktion

$$f: x \rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$$

ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen -2 und 6 schneidet.

Lösungsmenge:

$$L =]-\infty, -2] \cup [6, +\infty[$$



c)

$$\frac{x-2}{x+1} > 0$$

Eine Fallunterscheidung lässt sich vermeiden, indem man mit dem Quadrat des Nenners multipliziert.

Die neue Ungleichung $(x-2)(x+1) > 0$ hat die Lösungsmenge:

$$L =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$$

Aufgabe:

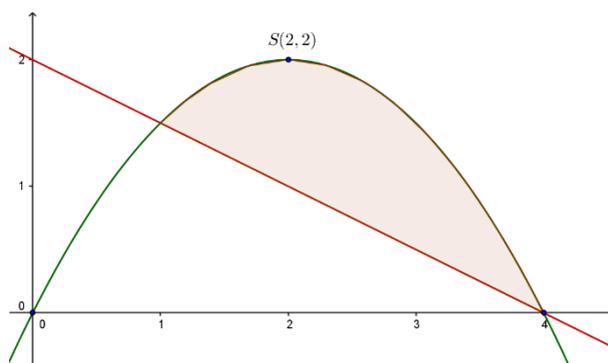
Es ist die gefärbte Punktmenge in der Abbildung (ohne Rand) durch ein System von Ungleichungen zu beschreiben.

Da die Parabel die x-Achse an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$ schneidet, kann ihre Gleichung in der Form $y = ax(x-4)$ angesetzt werden.

Der Scheitel $S(2, 2)$ erfüllt die

Parabelgleichung:

$$2 = a \cdot 2 \cdot (-2) \text{ mit der Lösung } a = \frac{1}{2}$$



Gesuchtes Ungleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} y < \frac{1}{2}x(4-x) \\ y > 2 - \frac{1}{2}x \end{array} \right|$$