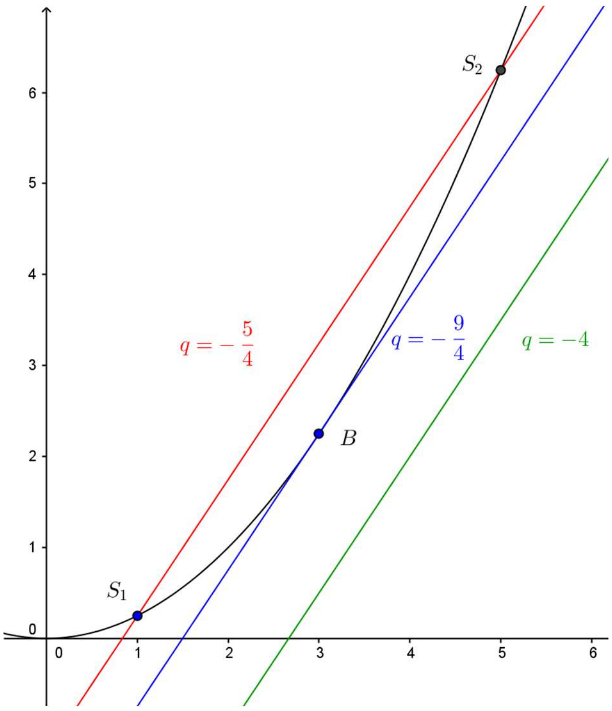
12 Schnitt von Parabeln mit Geraden, Parabeltangente

Vorbereitende Aufgabe:
Für welchen Wert des Parameters q hat die quadratische Gleichung $x^2 + 6qx - q = 0$ genau eine Lösung?

Eine quadratische Gleichung hat genau dann eine einzige Lösung, wenn ihre Diskriminante den Wert 0 hat.
$D = 36q^2 + 4q = 4q(9q - 1) = 0$
$q = 0$ $\quad x = 0$ ist die einzige Lösung
$q = -\frac{1}{9}$ $\quad x = \frac{1}{3}$ ist die eeinzige Lösung

Aufgabe:
Es sind die Schnittpunkte der Parabel p: $y = \frac{1}{4}x^2$ mit der Geraden g: $y = \frac{3}{2}x + q$ für die folgenden Parameterwerte zu bestimmen:
a) $q = -\frac{5}{4}$ b) $q = -\frac{9}{4}$ c) $q = -4$



Die Koordinaten der gemeinsamen Punkte erfüllen sowohl die Geraden als auch die Parabelgleichung:

y: $\frac{1}{4}x^2 = \frac{3}{2}x + q$ oder
$\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - q = 0$

Diese quadratische Gleichung hat die Diskriminante $D = \frac{9}{4} + q$.

a)
$q = -\frac{5}{4}$ $\quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = 0 \quad D = 1 > 0$
Die Gerade g schneidet die Parabel in zwei verschiedenen Punkten $S_1\left(1, \frac{1}{4}\right)$ und $S_2\left(5, \frac{25}{4}\right)$

b)
$q = -\frac{9}{4}$ $\quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = 0 \quad D = 0$
Die quadratische Gleichung $(x - 3)^2 = 0$ hat die Lösung $x = 3$
Die Gerade berührt die Parabel im Punkt $B\left(3, \frac{9}{4}\right)$. g ist die Parabeltangente im Punkt B.

c)
$q = -4$ $\quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 4 = 0 \quad D = -\frac{7}{4} < 0$
Die Gleichung hat keine reelle Lösung. Die Gerade meidet die Parabel.

Allgemein:
Das Problem, die Schnittpunkte einer quadratischen Parabel mit einer Geraden g: $y = mx + q$ zu schneiden, führt auf eine quadratische Gleichung mit der Diskriminante D. Es können damit die folgenden Fälle auftreten:

$D > 0$	Die Gerade schneidet die Parabel in zwei verschiedenen Punkten.
$D = 0$	Die Gerade berührt die Parabel, sie ist Tangente
$D < 0$	Die Gerade meidet die Parabel

Bemerkungen:
Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Kegelschnitte Ellipse (insbesondere auch Kreis) und Hyperbel.
Auch im Ausnahmefall der Parabelachse ergibt sich genau ein Schnittpunkt.

Übungsaufgabe:
Wie lautet die Gleichung der Tangente t an die Parabel p: $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 3$, die zur Geraden g: $y = -2x$ parallel ist?

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = -2x + q$.
Q ist so zu bestimmen, dass die Gleichung $-\frac{1}{2}x^2 - x + 3 = -2x + q$ oder $-\frac{1}{2}x^2 + x + 3 - q = 0$ genau eine Lösung hat.

Lösung: $q = \frac{7}{2}$, $B\left(1, -\frac{3}{2}\right)$

Die Steigung der Parabeltangente

Wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Parabelscheitel im Ursprung liegt, dann kann jede quadratische Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ beschrieben werden.
Für die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden g: $y = mx + q$ gilt dann:
$ax^2 - mx - q = 0$
Diese quadratische Gleichung hat die Diskriminante
$D = m^2 - 4aq$
Ist g Tangente, dann verschwindet die Diskriminante d.h. es gilt:
$D = m^2 - 4aq = 0$
Mit der quadratischen Auflösungsformel ergibt sich damit die x-Koordinate des Berührungspunkts zu
$x_B = \frac{m}{2a}$
Löst man diese Gleichung nach m auf, so erhält man für die Steigung der Parabeltangente den Wert
$m = 2ax_B$
Wird dieser Wert in die Diskriminante eingesetzt, so erhält man
$m^2 - 4aq = (2ax_B)^2 - 4aq = 4a(ax_B^2 + q) = 0$
und daraus wegen $a \neq 0$ den y-Achsenabschnitt q zu

Satz: Die Tangente an die Parabel $y = ax^2$ hat im Parabelpunkt $P(x_B, y_B)$ die Gleichung $y = 2ax_B \cdot x - ax_B^2$

$q = -ax_B^2$

Bemerkung:
Das Ergebnis bedeutet, dass die Scheiteltangente eine Parabeltangente halbiert.

Das geometrische Problem in einem beliebigen die Tangente an eine Kurve zu bestimmen wird in der später behandelten Analysis → **Differentialrechnung** gelöst.