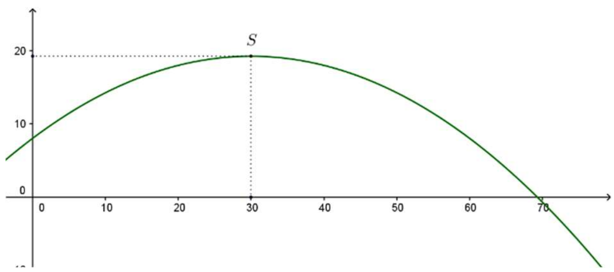
16 Ein Beispiel aus der Physik: Der schiefe Wurf

Ein Stein wird von einer um h erhöhten Plattform mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \binom{v_x}{v_y}$, wobei $v_x > 0$ ist geworfen (der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt). Nach welcher Zeit erreicht er den höchsten Punkt und wie gross ist die Scheitelhöhe?



Bewegungsgleichung für den schiefen Wurf ohne Luftwiderstand:

1) $x = v_x \cdot t$
2) $y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + h \qquad h > 0$
Wegen1) gilt: $t = \frac{x}{v_x}$eingesetzt in 2)
Einsetzen in 2) führt auf:

$$y = v_y \cdot \frac{x}{v_x} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_x}\right)^2 + h = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot x^2 + \frac{v_y}{v_x} \cdot x + h$$

numerisches Beispiel (vgl. die Abbildung):
h = 8 m, v_x = 20 m/s, v_y = 15 m/s, g = 10 m/s^2
3) $\quad y = -\frac{1}{80} x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + 8$

Der Stein erreicht den höchsten Punkt S wegen $u = -\frac{b}{2a} = 30$ in 30 m horizontaler Entfernung, wegen 1) nach 1.5 Sekunden. Die Scheitelhöhe ergibt sich mit 3) und x = 30 zu 19.25 m, die erreichte Weite durch Lösen der quadratischen Gleichung$-\frac{1}{80} x^2 + \frac{3}{4} \cdot x + 8 = 0$ zu 69.2 $\approx$ 70 m.

Im allgemeinen Fall mit h = 0, Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Abwurfwinkel α gilt:

4) $\quad x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha.$
5) $\quad y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2$
Löst man 4) nach t auf so erhält man:
6) $\quad t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$
Setzt man diesen Term in 5) ein so erhält man die Gleichung der Bahnkurve (Wurfparabel):
3) $\quad y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} \cdot \sin\alpha = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan\alpha$

Die Wurfweite w kann mit folgender Überlegung bestimmt werden:

Für die positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan\alpha = x\left(-\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x + \tan\alpha\right) = 0$$

gilt: $\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x = \tan\alpha$ oder

$$x = \tan\alpha \cdot \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\alpha}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \tan\alpha \cdot \cos^2\alpha = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

und damit wegen $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin(2\alpha)$
zur Wurfweite w in horizontaler Richtung.

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$$

Setzt man w ind Gleichung 6) ein, so erhält man für die zugehörige Wurfzeit T:

$$T = \frac{w}{v_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{v_0^2 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g \cdot v_0 \cdot \cos\alpha} = \frac{2v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

Die Scheitelhöhe h ergibt sich aus 5) als y-Wert zur Zeit $t = \frac{1}{2}T = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$:

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 = t \cdot \left(v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}g \cdot t\right)$$

$$= \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \cdot \left(v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}g \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right) = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot v_0 \cdot \sin\alpha\right)$$

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$

zu

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2g}$$

Bei gegebenem v_0 wird damit

w maximal für α = 45°	$w = \frac{v_0^2}{g}$
h maximal für α = 90°	$h = \frac{v_0^2}{2g}$
T maximal für α = 90°	$T = \frac{2v_0}{g}$