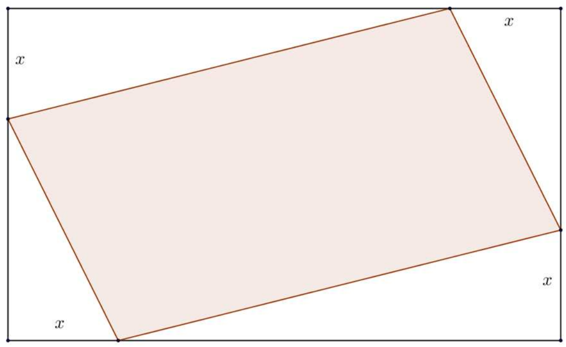
12. Extremalaufgaben

Beispiele:
a)
Dem Rechteck mit den Seiten a = 5 und b = 3 wird ein Parallelogramm einbeschrieben. Für welche Wahl von x wird der Parallelogramminhalt I minimal?



Zielfunktion:
Der Parallelogramminhalt soll minimal werden:

$I(x) = 15 - x \cdot (3 - x) - x \cdot (5 - x) = 2x^2 - 8x + 15 = 2 \cdot (x - 2)^2 + 7$

Bestimmung des Extremums:
Der Graph der Funktion I ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Scheitelkoordinaten ergeben sich zu $u = 2$ und $v = I(2) = 7$

Ergebnis:
Der Inhalt des Parallelogramms wird für x = 2 minimal.
Der minimale Inhalt beträgt $I(2) = 7$.

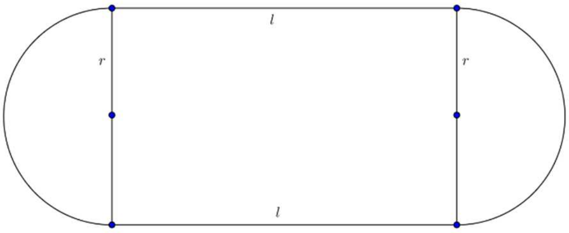
b)
Eine Fabrik setzt monatlich 200 Stück eines Zubehörteils ab und hat an jedem Stück einen Reingewinn von 10 Fr.. Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von Fr. 1.-, Fr 2.-, usf. eine Erhöhung des Monatsumsatzes von c = 50 Stück, 2c Stück bewirken würde. Bei welcher Preissenkung pro Stück ist der grösste Gesamtgewinn zu erwarten?

Zielfunktion:
Gewinn in Fr. pro Stück bei einer Preisreduktion um x Fr.: $10 - x$
Anzahl verkaufte Stücke $200 + 50x$
Gesamtgewinn $G(x) = (10 - x)(200 + 50x) = 50(10 - x)(4 + x)$

Bestimmung des Extremums:
Der Graph der Zielfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen 10 und -4 schneidet. Der Scheitel liegt damit aus Symmetriegründen an der Stelle x = 3.
Der Gesamtgewinn wird bei einer Preisreduktion von Fr. 3.- maximal und beträgt $G(3) = 2450$ Fr.

c)

Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius r sein und wie lang ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll?



1. Zielfunktion:
$I = 2r \cdot l$

2. Nebenbedingung:
$2\pi r + 2l = 400 \qquad l = 200 - \pi r$

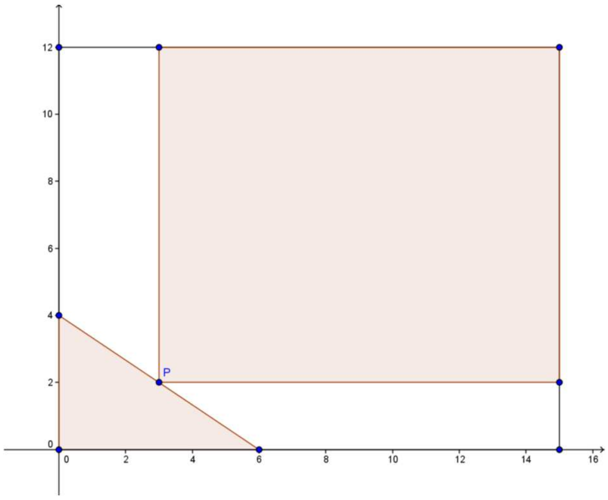
3. Zielfunktion mit einer Variablen
$A(r) = 2r(200 - \pi r)$

4. Extremum:
Der Graph der Zielfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen 0 und $\frac{200}{\pi}$ schneidet. Der Scheitel liegt damit aus Symmetriegründen an der Stelle $r = \frac{100}{\pi}$.

Ergebnis:
Der Inhalt des Rechtecks ist bei $r = \frac{100}{\pi} \approx 31.83\ m$ maximal.
Die Länge des geraden Stücks beträgt 100 m

Bemerkung:
Die Bestimmungen des IAAF schreiben für die Geraden eine Länge von 84.39 Meter und für den Kurvenradius 36.80 Meter vor.

d)
Von einer rechteckigen Glasplatte von 15 dm und b = 12 dm ist an einer Ecke ein Stück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten c = 6 dm und d = 4 dm abgebrochen. Aus der restlichen Platte soll eine rechteckige Platte von möglichst grossem Flächeninhalt geschnitten werden.
Wie sind Länge und Breite dieses Rechtecks zu wählen?



1. Zielfunktion: Flächeninhalt A minimal
$I(x) = (15 - x)(12 - y)$

2. Nebenbedingung mit der Geradengleichung dem oder Strahlensatz:
$y = 4 - \frac{2}{3}x$
3. Zielfunktion in einer Variablen:
$I(x) = (15 - x)\left(12 - \left(4 - \frac{2}{3}x\right)\right) = \frac{2}{3}(15 - x)(12 + x)$
4. Bestimmung des Extremums:
Der Graph der Zielfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen -12 und 15 schneidet. Der Scheitel liegt damit aus Symmetriegründen an der Stelle $x = \frac{3}{2}$.

Ergebnis:
Das Rechteck hat für $x = 1.5$ dm maximalen Inhalt. In diesem Fall beträgt die Länge 13.5dm und die Breite 9 dm.

e)

Bewegung zweier Massenpunkte

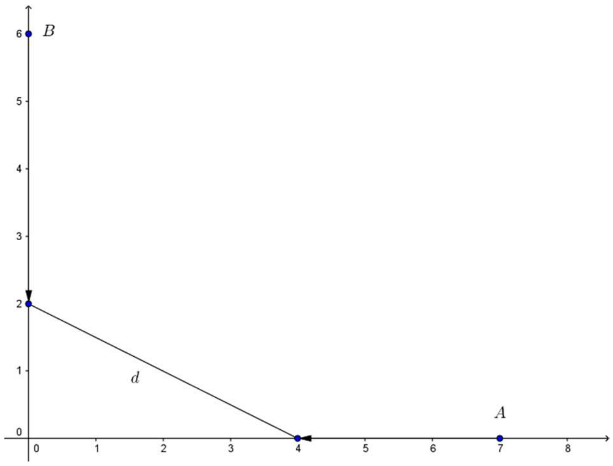
Der 1. Punkt: startet zur Zeit t = 0 in A(7, 0),

Geschwindigkeit $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der 2. Punkt startet zur Zeit t = 0 in B(0, 6),

Geschwindigkeit $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Zu welcher Zeit ist der Abstand der beiden Punkte minimal?



1. Zielfunktion:

Sie stellt die Grösse, die extremal werden soll, mit Hilfe geeigneter Variablen dar.

Der Abstand ist genau dann minimal, wenn das Abstandsquadrat D minimal ist.

$D = x^2 + y^2$

2. Nebenbedingungen:

$x = 7 - 3t \qquad y = 6 - 4t$

3. Zielfunktion als Funktion einer einzigen Variablen

$D(t) = (7 - 3t)^2 + (6 - 4t)^2 = 25t^2 - 90t + 85$

4. Bestimmung des Extremums:

Der Graph der Zielfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel. Ihr Scheitel liegt an der Stelle $t = -\frac{b}{2a} = \frac{90}{50} = \frac{9}{5}$,

Ergebnis:

Das Abstandsquadrat wird also minimal für $t = \frac{9}{5}$.

Einsetzen in 3. ergibt $D\left(\frac{9}{5}\right) = 4$. Der minimale Abstand beträgt also 2.