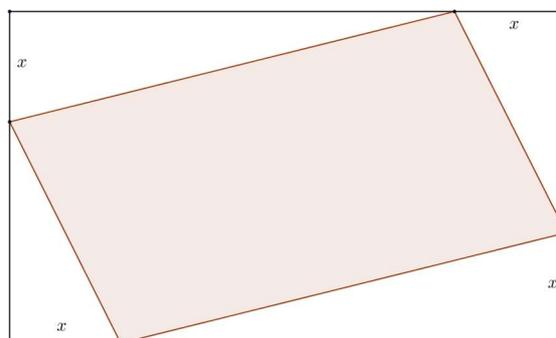


## 15 Extremalaufgaben

Beispiele:

a)

Dem Rechteck mit den Seiten  $a = 5$  und  $b = 3$  wird ein Parallelogramm einbeschrieben. Für welche Wahl von  $x$  wird der Parallelogramminhalt  $I$  minimal?



Zielfunktion:

Der Parallelogramminhalt soll minimal werden:

$$I(x) = 15 - x \cdot (3 - x) - x \cdot (5 - x) = 2x^2 - 8x + 15 = 2 \cdot (x - 2)^2 + 7$$

Bestimmung des Extremums:

Der Graph der Funktion  $I$  ist eine nach oben geöffnete Parabel. Die Scheitelkoordinaten ergeben sich zu  $u = 2$  und  $v = I(2) = 7$

Ergebnis:

Der Inhalt des Parallelogramms wird für  $x = 2$  minimal.

Der minimale Inhalt beträgt  $I(2) = 7$ .

b)

Eine Fabrik setzt monatlich 200 Stück eines Zubehörteils ab und hat an jedem Stück einen Reingewinn von 10 Fr.. Marktforschung hat ergeben, dass eine Preissenkung von Fr. 1.-, Fr 2.-, usf. eine Erhöhung des Monatsumsatzes von  $c = 50$  Stück,  $2c$  Stück bewirken würde. Bei welcher Preissenkung pro Stück ist der grösste Gesamtgewinn zu erwarten?

Zielfunktion:

Gewinn in Fr. pro Stück bei einer Preisreduktion um $x$ Fr.:	$10 - x$
Anzahl verkaufte Stücke	$200 + 50x$
Gesamtgewinn	$G(x) = (10 - x)(200 + 50x) = 50(10 - x)(4 + x)$

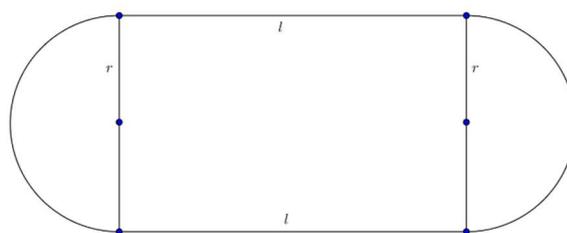
Bestimmung des Extremums:

Der Graph der Zielfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die  $x$ -Achse an den Stellen 10 und -4 schneidet. Der Scheitel liegt damit aus Symmetriegründen an der Stelle  $x = 3$ .

Der Gesamtgewinn wird bei einer Preisreduktion von Fr. 3.- maximal und beträgt  $G(3) = 2450$  Fr.

c)

Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius  $r$  sein und wie lang ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll?



1. Zielfunktion:

$$I = 2r \cdot l$$

2. Nebenbedingung:

$$2\pi r + 2l = 400 \quad l = 200 - \pi r$$

3. Zielfunktion mit einer Variablen

$$A(r) = 2r(200 - \pi r)$$

4. Extremum:

Der Graph der Zielfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen 0 und  $\frac{200}{\pi}$  schneidet. Der Scheitel liegt damit aus Symmetriegründen an der Stelle

$$r = \frac{100}{\pi}.$$

Ergebnis:

Der Inhalt des Rechtecks ist bei  $r = \frac{100}{\pi} \approx 31.83 \text{ m}$  maximal.

Die Länge des geraden Stücks beträgt 100 m

Bemerkung:

Die Bestimmungen des IAAF schreiben für die Geraden eine Länge von 84.39 Meter und für den Kurvenradius 36.80 Meter vor.

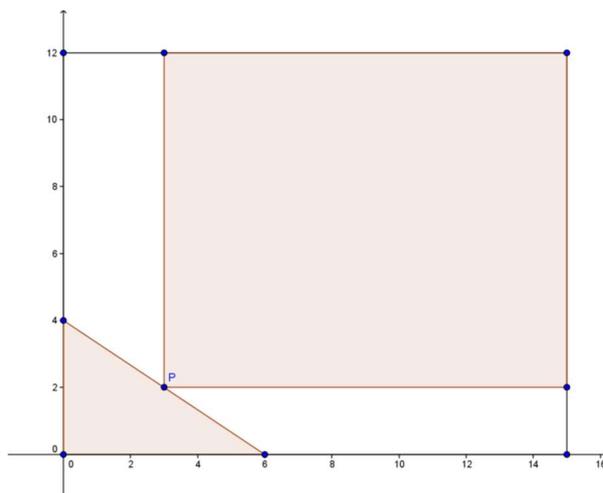
d)

Von einer rechteckigen Glasplatte von 15 dm und  $b = 12$  dm ist an einer Ecke ein Stück in Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $c = 6$  dm und  $d = 4$  dm abgebrochen. Aus der restlichen Platte soll eine rechteckige Platte von möglichst grossem Flächeninhalt geschnitten werden.

Wie sind Länge und Breite dieses Rechtecks zu wählen?

1. Zielfunktion: Flächeninhalt  $A$  maximal

$$I(x) = (15 - x)(12 - y)$$



2. Nebenbedingung mit der Geradengleichung dem oder Strahlensatz:

$$y = 4 - \frac{2}{3}x$$

3. Zielfunktion in einer Variablen:

$$I(x) = (15 - x) \left( 12 - \left( 4 - \frac{2}{3}x \right) \right) = \frac{2}{3} (15 - x)(12 + x)$$

4. Bestimmung des Extremums:

Der Graph der Zielfunktion ist eine nach unten geöffnete Parabel, welche die x-Achse an den Stellen -12 und 15 schneidet. Der Scheitel liegt damit aus Symmetriegründen an der Stelle

$$x = \frac{3}{2}.$$

Ergebnis:

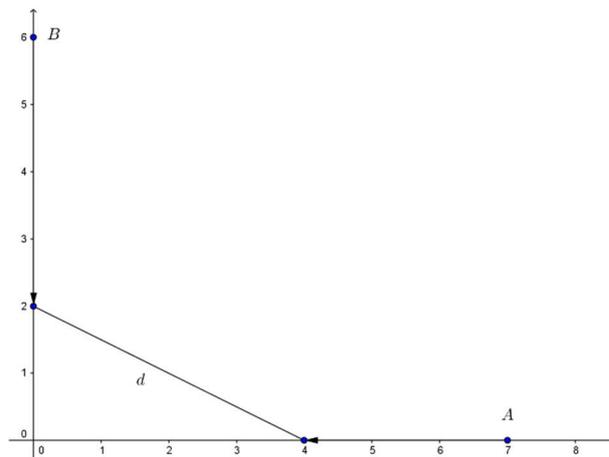
Das Rechteck hat für  $x = 1.5$  dm maximalen Inhalt. In diesem Fall beträgt die Länge 13.5dm und die Breite 9 dm.

e)

Bewegung zweier Massenpunkte

Der 1. Punkt: startet zur Zeit  $t = 0$  in  $A(7, 0)$ ,Geschwindigkeit  $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ Der 2. Punkt startet zur Zeit  $t = 0$  in  $B(0, 6)$ ,Geschwindigkeit  $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ 

Zu welcher Zeit ist der Abstand der beiden Punkte minimal?



1. Zielfunktion:

Sie stellt die Grösse, die extremal werden soll, mit Hilfe geeigneter Variablen dar.

Der Abstand ist genau dann minimal, wenn das Abstandsquadrat  $D$  minimal ist.

$$D = x^2 + y^2$$

2. Nebenbedingungen:

$$x = 7 - 3t \quad y = 6 - 4t$$

3. Zielfunktion als Funktion einer einzigen Variablen

$$D(t) = (7 - 3t)^2 + (6 - 4t)^2 = 25t^2 - 90t + 85$$

4. Bestimmung des Extremums:

Der Graph der Zielfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel. Ihr Scheitel liegt an der

$$\text{Stelle } t = -\frac{b}{2a} = \frac{90}{50} = \frac{9}{5},$$

Ergebnis:

Das Abstandsquadrat wird also minimal für  $t = \frac{9}{5}$ .Einsetzen in 3. ergibt  $D\left(\frac{9}{5}\right) = 4$ . Der minimale Abstand beträgt also 2.