2. Die quadratische Auflösungsformel («Mitternachtsformel»)

Die Frage nach den Schnittpunkten der quadratischen Parabel mit der x-Achse führt mit der Scheitelpunktsgleichung auf die quadratische Gleichung:

$y = a \cdot (x-u)^2 + v = 0$
Oder nach Divisione durch a auf
$(x-u)^2 = -\frac{v}{a}$
Und wegen $u = -\frac{b}{2a}$ und $v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ auf
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}$
Der Zähler des rechten Bruchs heisst Diskriminante D, denn er entscheidet über die Anzahl der Lösungen. Es können drei Fälle auftreten:

1. $D = b^2 - 4ac < 0$

Da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann, hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung. Die zugehörige quadratische Parabel meidet die x-Achse.

2. $D = 0$
Die Gleichung hat in diesem Fall wegen $D = 0$ die Form
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$
Die Gleichung hat genau eine Lösung $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$
Die zugehörige Parabel berührt die x-Achse.

3. Fall (Hauptfall
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2} = \left(\pm\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$
$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}$ $\quad$ $x + \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Die quadratische Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
Die zugehörige Parabelschneidet die x-Achse an wie verschiedenen Stellen.

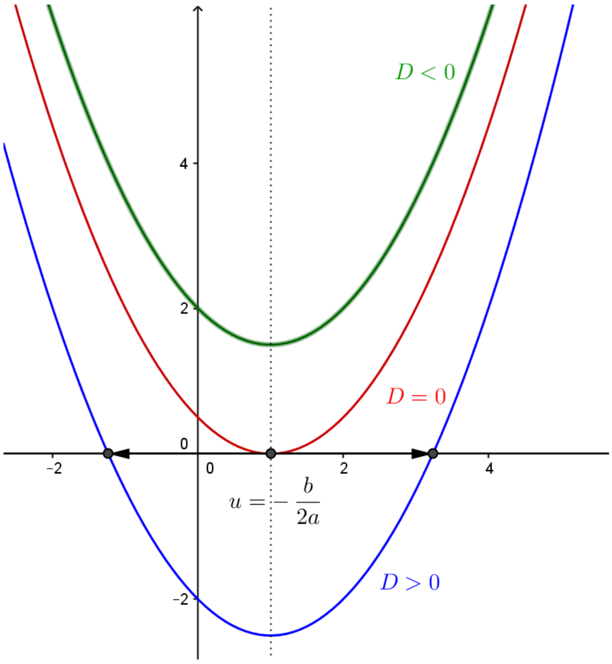
Satz:
Die quadratische Gleichung $ax^2 + b \cdot x + c = 0$ a, b, c ∈ R, a ≠ 0 mit der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ hat für

$D > 0$	zwei verschiedene reelle Lösungen $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	genau eine reelle Lösung $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$ (sogenannte Doppellösung)
$D < 0$	keine reelle Lösung

Bemerkung: Diskriminante kommt vom lateinischen discriminare: trennen.

Zusammenhang zwischen quadratischer Funktion und quadratischer Gleichung

In der Abbildung sind die Graphen der quadratischen Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + c$ für die Parameterwerte
a) $c = 2$ b) $c = \frac{1}{2}$ c) $c = -2$ dargestellt.
Die Parabeln gehen durch Parallelverschiebung in y-Richtung auseinander hervor. Die Bestimmung der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse führt auf die quadratische Gleichung
$\frac{1}{2} \cdot x^2 - x + c = 0$ mit der Diskriminante
$D = 1 - 2c$



a) $c = 2$ Diskriminante $D = -3 < 0$
Die Parabel meidet die x-Achse: Die quadratische Funktion hat keine reellen Nullstellen, die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen.

b) $c = \frac{1}{2}$ Diskriminante $D = 0$:
Die Parabel berührt die x-Achse. Die quadratische Funktion hat eine reelle Nullstelle. Die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung.

c) $c = -2$ Diskriminante $D > 0$:
Die Parabel schneidet die x-Achse. zwei reelle Lösungen. Die quadratische Funktion hat zwei verschiedene reelle Nullstellen. Die quadratische Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen.

Schreibt man die quadratische Auflösungsformel in der Form

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

so sieht man, dass sich die beiden Lösungen im Fall $D > 0$ ergeben, indem man von der x-Koordinate des Scheitels $u = \frac{-b}{2a}$ ausgehend $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ addiert bzw. subtrahiert.

Zusammenfassung:
Gegeben sind die quadratische Gleichung
(1) $ax^2 + bx + c = 0$ mit der Diskriminante D
und die zugehörige quadratische Funktion
(2) $f: x \to y = ax^2 + bx + c$

Es können drei Fälle auftreten:
a) $D < 0$ Gleichung (1) hat keine reelle Lösung,
die quadratische Parabel (2) meidet die x-Achse.
b) $D = 0$ Gleichung (1) hat genau eine reelle Lösung,
die quadratische Parabel (2) berührt die x-Achse
c) $D > 0$ Gleichung (1) hat zwei verschiedene reelle Lösungen,
die quadratische Parabel (2) schneidet die x-Achse