05 Der Satz von Vieta

François Viète (1540 – 1603) Jurist und Mathematiker

Der Satz von Vieta macht eine Aussage über die Beziehungen zwischen den Lösungen und den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung.

Beispiel:
$x^2 - 7x + 10 = 0$
$(x-2)(x-5) = 0$ Lösungen: $x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

Vermutung:
Das Produkt der Lösungen stimmt mit dem konstanten Glied überein,
die Summe der Lösungen mit dem mit (-1) multiplizierten Koeffizienten des linearen Gliedes.

Der Satz von Vieta:
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung
$x^2 + px + q = 0$ p, q $\in$R, dann gilt:
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

Beweis:
Die Gleichung $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$ hat die Lösungen x_1 und x_2.
Multipliziert man aus so erhält man
$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 + p \cdot x + q = 0$

Beweisvariante: Einsetzen der Lösungen in die quadratische Auflösungsformel.

Beispiele von Anwendungen:

a) Bestimmung der zweiten Lösung, wenn die erste bekannt ist.

Die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + q = 0$ habe die Lösung $x_1 = -5$.
Wie heisst die 2. Lösung x_2?

Nach Vieta gilt:
$x_1 + x_2 = -5 + x_2 = -2$
Folglich ist damit $x_2 = 3$ und wegen
$x_1 \cdot x_2 = -15 = q$

b) Lösung quadratischer Gleichungen in einfachen Fällen

$x^2 - 9x + 14 = 0$
Nach Vieta sind zwei Zahlen mit dem Produkt 14 und der Summe 9 gesucht:
Die gesuchten Lösungen sind $x_1 = 2 \quad x_2 = 7$

Übungsaufgaben dazu:

$x^2 + 6x + 8 = 0$	Lösungen: $x_1 = -2 \quad x_2 = -4$
$x^2 + x - 6 = 0$	Lösungen: $x_1 = 2 \quad x_2 = -3$
$x^2 - 3x - 10 = 0$	Lösungen: $x_1 = -2 \quad x_2 = 5$

c) Mit dem Satz können die Lösungen leicht überprüft wird en.

Sind $x_1 = -5$ und $x_2 = -3$ die Lösungen der quadratischen Gleichung
$x^2 - 8x + 15 = 0$?
Nach Vieta stimmt das Produkt, aber nicht die Summe.
Korrektur: die richtigen Lösungen sind $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$.

d) Zerlegung eines quadratischen Terms in Linearfaktoren.

Ist ein quadratischer Term zu zerlegen, so bestimmt man zunächst die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung wie in den beiden folgenden Beispielen:

quadratischer Term	$x^2 - 7x + 12$
zugehörige quadratische Gleichung	$x^2 - 7x + 12 = 0$
	Lösungen $x_1 = 3$ und $x_2 = 4$
Zerlegung des quadratischen Terms	$x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$

quadratischer Term	$2x^2 + x - 1$
zugehörige quadratische Gleichung	$2x^2 + x - 1 = 0$
	Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = \frac{1}{2}$
Zerlegung des quadratischen Terms	$2x^2 + x - 1 = 2(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$
	$= (x+1)(2x-1)$

Satz:
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ dann gilt für den zugehörigen quadratischen Term die Zerlegung
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ für alle $x \in \Re$

Die terme $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ heissen Linearfaktoren.

Übungsaufgaben:
$6x^2 - x - 15$
Zerlegung: $6\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right) = (2x+3)(3x-5)$

$x^2 - 2x - 4$
Zerlegung:

$$x^2 - 2x - 4 = \left(x - \left(1 + \sqrt{5}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{5}\right)\right)$$

Der im Satz angesprochene Sachverhalt gilt analog auch für Gleichungen höheren Grades:

Satz:
Sind x_1, x_2 und x_3 die Lösungen der kubischen Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dann gilt für den zugehörigen kubischen Term die Zerlegung
$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Anwendung:
Kennt man von einer kubischen Gleichung eine Lösung, dann können die restlichen Lösungen wie im folgenden Beispiel gefunden werden:

Durch Einsetzen bestätigt man, dass die Gleichung $x^3 + 3x^2 - 14x + 8 = 0$ die Lösung $x_1 = 2$ hat.
Aus dem Satz folgt, dass der Term der linken Seite durch $(x - 2)$ teilbar ist.
Polynomdivision ergibt die Zerlegung:
$x^3 + 3x^2 - 14x + 8 = (x - 2)(x^2 + 5x - 4)$
Mit der quadratischen Auflösungsformel erhält man die weiteren Lösungen
$x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{41}\right)$

Übungsaufgabe:
Die Gleichung $x^3 - 7x + d = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1$. Wie heissen die übrigen Lösungen?

Lösung: $d = 6$ $x_2 = -3$ und $x_3 = 2$