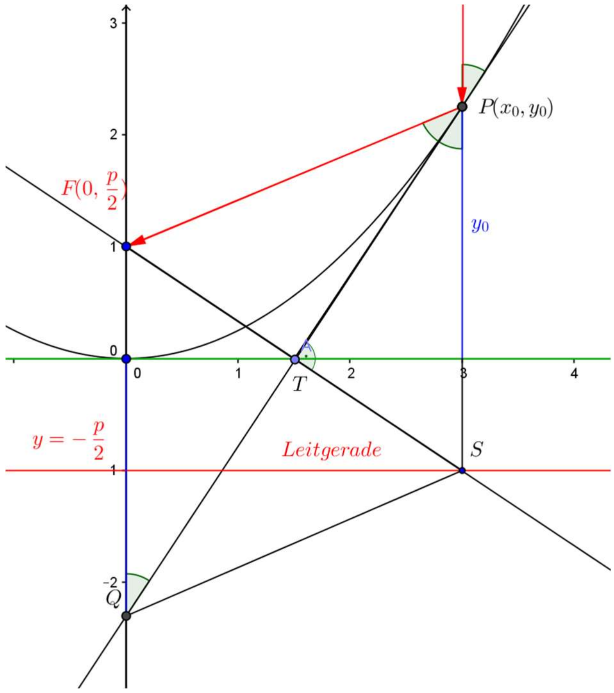
13 Die Parabel als geometrischer Ort

Aufgabe:
Bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt F und einer gegebenen Geraden *l* gleichen Abstand haben.



Bezeichnungen:
l heisst Leitgerade, F heisst Brennpunkt.
Der Abstand des Brennpunkts F von der Leitgeraden *l* heisst Parameter und wird mit p bezeichnet.

Skizze:
$l: y = -1$ F(0, 1)

Konstruktion:
Schneide die Parallele zur Leitgeraden im Abstand r mit dem Kreis um F mit Radius r.

Herleitung der Parabelgleichung:
Ortsbedingung:
$\left|\overrightarrow{PL}\right|^2 = \left|\overrightarrow{PF}\right|^2$
Nach Pythagoras gilt:
$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2$ oder ausmultipliziert
$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = y^2 - py + \frac{p^2}{4} + x^2$ und vereinfacht
$2py = x^2$ oder
$y = \dfrac{1}{2p}x^2$
Das ist die Gleichung der Parabel
mit dem Brennpunkt $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ und der Leitgeraden l: $y = -\frac{p}{2}$
Damit ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem Parameter p und dem bisherigen a in der Parabelgleichung $y = ax^2$
$a = \frac{1}{2p}$ oder $p = \frac{1}{2a}$
Bei der Normalparabel $y = x^2$ hat der Brennpunkt wegen a = 1die Koordinaten $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Für technische Anwendungen ist die folgende Parabeleigenschaft wichtig:
Vom Brennpunkt ausgehende Strahlen werden an der Parabel so reflektiert, dass sie achsenparallel austreten (Abbildung links: Scheinwerfer). Umgekehrt werden achsenparallel eintreffende Strahlen an einem parabolförmigen Spiegel im Brennpunkt gebündelt (Abbildung rechts: Radioteleskop, „Satellitenschüssel“)

Übungsaufgaben:

a)

Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Gesucht sind ihr Brennpunkt und ihre Leitgerade.

Lösung: $F(1, -1), y = -2$

b)

Gesucht ist die Gleichung einer Parabel, wenn ihr Brennpunkt F(2, 0) und ihre Leitgerade l: $y = 2$ gegeben ist.

Lösung $y = -\frac{1}{4}x^2 - x$

c)

Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte M(x, y) der Kreise, die durch den Punkt C(2, 1) gehen und die x-Achse berühren?

Lösung: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

d)

Über der Grundseite A(-c, 0)B(c, 0) werden Dreiecke betrachtet, deren Ecke C auf der Geraden y = h mit h > 0 liegen. Auf welcher Kurve liegen die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke?

Lösung: $y = -\frac{1}{h}x^2 + \frac{c^2}{h}$