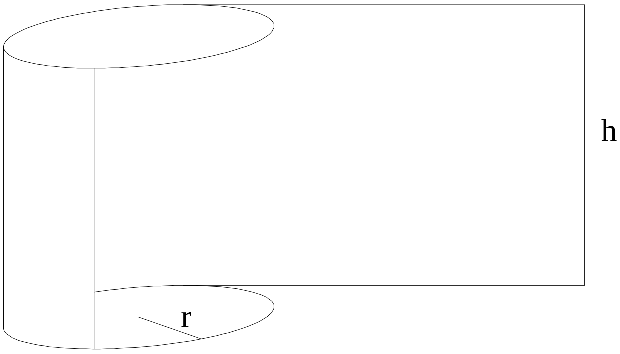
3. Extremalprobleme

Aufgabe:
Eine übliche Konservendose ist im wesentlichen ein Zylinder mit dem Radius r und der Höhe h. Ihr Volumen ist V = 1 Liter = 1 dm^3. Welche Form muss die Dose haben, damit für ihre Herstellung möglichst wenig Material gebraucht wird?

1. Zielfunktion:



Die Zylinderoberfläche (Mantel, Grund- und Deckfläche) soll minimal werden:

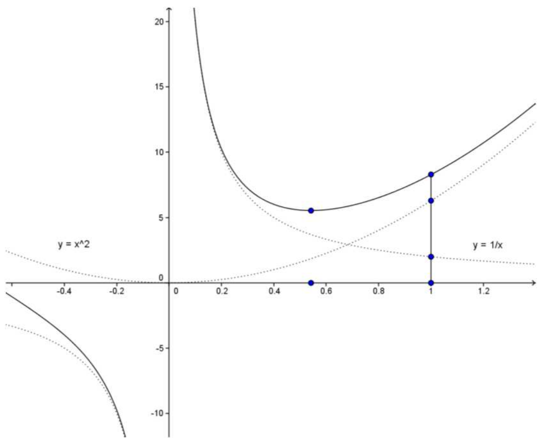
$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

2. Nebenbedingung:

Das Zylindervolumen soll 1 sein:
$$V = \pi r^2 h = 1$$
Überlege: r in h ausdrücken oder h in r?

$$h = \frac{1}{\pi r^2}$$

3. Zielfunktion in einer Variablen:
$$O(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} = 2\pi \cdot \left(r^2 + \frac{1}{\pi r} \right)$$



Der Graph von O ist die Überlagerung einer Ursprungsparabel und einer rechtwinkligen Hyperbel.

4.
$$O'(r) = 2\left(2\pi r - \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

$$r^3 = \frac{1}{2\pi} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0.54\ dm$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = 1.08\ dm$$

Ergebnis:
Die Oberfläche wird für eine Dose mit quadratischem Achsenschnitt minimal!

Kommentar:
Bei im Handel erhältlichen Dosen misst der Radius r = 0.51 dm, die Höhe h = 1.22 dm. Mögliche Begründung: es wurden die Falze und ein allfälliger Produktionsabfall nicht berücksichtigt. Zudem werden wohl bei der Herstellung einer Konservendose noch andere Aspekte eine Rolle spielen?

Die Lösung kann ohne Differentialrechnung nach dem folgenden Satz ermittelt werden:

Satz:
Vor. $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \mathrm{c}$ mit $x_i, c \geq 0$
Beh. $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ wird genau dann minimal, wenn $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{c}$

Die Oberfläche wird genau minimal, wenn $\left(r^2 + \frac{1}{\pi r}\right)$ minimal wird. Stellt man den Term in der Form $\left(r^2 + \frac{1}{2\pi r} + \frac{1}{2\pi r}\right)$ dar, dann ist das Produkt der drei Summanden konstant, nämlich $\frac{1}{4\pi^2}$. Damit liegt nach dem Satz das Minimum bei $r^2 = \frac{1}{2\pi r}$ oder also bei

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$