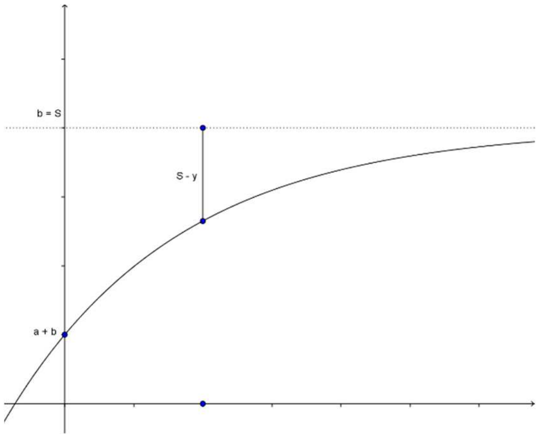
4.3 Beschränktes Wachstum, Abklingfunktionen

In der Natur verlaufen Wachstumsvorgänge nur über kurze Zeiträume exponentiell. Auf lange Sicht sind dem Wachstum natürliche Schranken gesetzt. Die Veränderung ist umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand der Sättigungsgrenze S nähert. Man trifft deshalb die Modellannahme, dass die momentane Wachstumsrate proportional zur Differenz S – y ist, d.h.



$\dot{y} = k \cdot (S - y)$

Dies ist die Differentialgleichung des beschränkten Wachstums mit der allgemeinen Lösung:

a) $f(t) = S - a \cdot e^{-\lambda t}$ $\quad t \geq 0$, a, $\lambda > 0$: beschränktes Wachstum

b) $f(t) = S + a \cdot e^{-\lambda t}$ $\quad t \geq 0$, a, $\lambda > 0$: beschränktes Wachstum

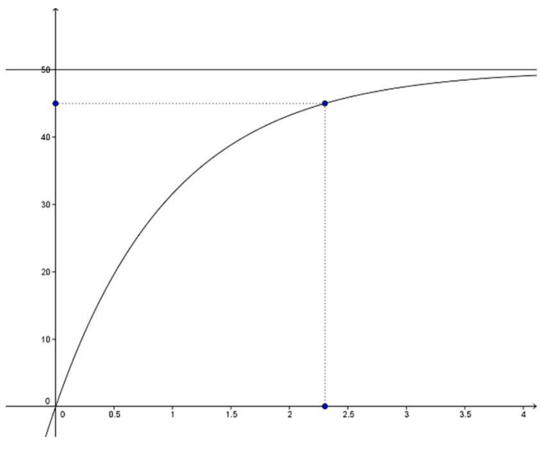
f ist im Fall a) monoton wachsend, im Fall b) monoton fallend. Der Funktionswert strebt für $t \to \infty$ gegen den Grenzwert S d.h. y = S ist Asymptote.

Beispiel für a) beschränktes Wachstum:
Aufladen eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R.

$u(t) = u_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ $\quad u_0$: Endwert der Kondensatorspannung

Aufgabe:

Berechne für die speziellen Werte R = 100 Ω, C = 10 μF und u_0 = 50 V den Zeitpunkt t, in dem die Kondensatorspannung genau 90 % ihres Endwerts erreicht hat.



Lösung:
RC = 100 $\Omega \cdot 10^{-5}$ F = 10^{-3} s = 1ms
RC heisst Zeitkonstante.
t (in ms) muss die folgende Bestimmungsgleichung erfüllen:

$u(t) = 50 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1}}\right) = 0.9 \cdot 50$

bzw.nach Division durch 50

$1 - e^{-t} = 0.9$

$e^{-t} = 0.1$ $\quad$ nach Logarithmieren der beiden Seiten

t = ln 10 ≈ 2.3026 ms

Die Kondensatorspannung erreicht nach rund 2.3 ms 90% ihres Endwerts.

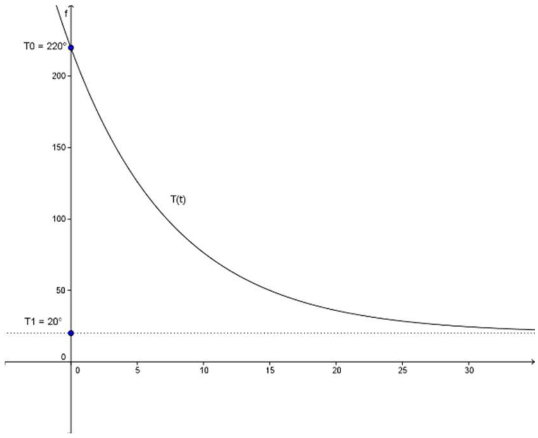
Beispiel für b) Abkühlungsgesetz nach Newton

Ein Körper besitze zur Zeit t = 0 die Temperatur T_0 und werde in der Folgezeit durch vorbeiströmende Luft der (konstanten) Temperatur T_1 gekühlt ($T_1 < T_0$). Seine Temperatur T nimmt ab nach dem Gesetz

$$T(t) = (T_0 - T_1) \cdot e^{-\lambda t} + T_1 \qquad (1)$$

Die Körpertemperatur T strebt asymptotisch dem Grenzwert T_1 zu.

Aufgabe:
Ein bei 220° gebackener Kuchen wird in der 20°C warmen Küche auf den Tisch gestellt. Nach 15 Minuten beträgt seine Temperatur noch 50°C. Wann wird sie 25° betragen?



Ansatz:
Sättigungsgrenze ist die Raumtemperatur 20°

$$T(t) = (220 - 20) \cdot e^{-\lambda \cdot t} + 20 \qquad (2)$$

λ ist bestimmt durch die Bedingung T(15) = 50

$$T(15) = (220 - 20) \cdot e^{-\lambda \cdot 15} + 20 = 50$$
$$200 \cdot e^{-\lambda \cdot 15} = 30$$
$\lambda = -\frac{1}{15} \ln\left(\frac{3}{20}\right)$ eingesetzt in (2)

29.17 min ≈ 29 min

Uebungsaufgaben:

a)
In einem Versuch mit Öl werden bei einer Kühltemperatur von T_1 = 20 °C folgende Werte gemessen: nach 50 min beträgt die Öltemperatur 85°C, nach 150 min dagegen nur noch 30°C. Nach welcher Zeit t_1 hätte das Öl eine Temperatur von 60 °C erreicht?

$$\mathrm{T}(50) = (\mathrm{T}_0 - 20) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k} \cdot 50} + 20 = 85$$
$$\mathrm{T}(150) = (\mathrm{T}_0 - 20) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{k} \cdot 150} + 20 = 30$$

T_0 = 185.57 °C, k = 0.0187 min^{-1} T = 60 °C für t_1 = 75.96 min

b)
Der Tee in einer Feldflasche ist im Verlauf einer Wanderung 30°C warm geworden. Die Flasche wird zur Abkühlung in einen Bergbach getaucht. Nach 2 Minuten beträgt die Temperatur 28°C, nach weiteren 2 Minuten noch 26.2°C. Welches ist die Wassertemperatur des Baches?

Lösung: 20°

Aufgabe:
Beim Lösen von Kochsalz (NaCl) in destilliertem Wasser beschreibt die Funktion m(t) (in g) die zur Zeit t bereits gelöste Menge an Kochsalz. Die gelöste Salzmenge kann einen bestimmten Wert m_0, die Sättigungsgrenze nicht überschreiten. Beobachtungen zeigen, dass die Geschwindigkeit mit der sich m(t) ändert ungefähr proportional zur Menge des noch lösbaren Salzes ist.
a)
welche Differentialgleichung gilt, wenn die Sättigungsgrenze bei 100g destliertem Wasser 36g Kochsalz beträgt?
b)
Wie heisst der Funktionsterm, wenn zur Zeit t = 0 noch kein Kochsalz in 100g destilliertem Wasser gelöst war, nach 30 Minuten aber 28g?

Lösung a)
$\dot{m}(t) = k \cdot (36 - m(t))$
b)
Ansatz: $m(t) = 36 - c \cdot e^{-\lambda t}$ wegen m(0) ist c = 36
$m(t) = 36 \cdot (1 - e^{-\lambda t})$
mit $m(30) = 36 \cdot (1 - e^{-\lambda t}) = 28$ ergibt sich λ = 0.0501

4.4 Logistisches Wachstum

Häufig werden Wachstumsprozesse zutreffender mit folgendem Modell beschrieben, das exponentielles und beschränktes Wachstum kombiniert
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist proportional zum vorhandenen Bestand y
Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist auch proportional zum Rest (S - y) der Kapazität.

Man spricht von logistischem Wachstum, das die folgende Differentialgleichung erfüllt:
$\dot{y} = ky \cdot (S - y)$
Es kann gezeigt werden, dass die allgemeine Lösung in der folgenden Form dargestellt werden kann:

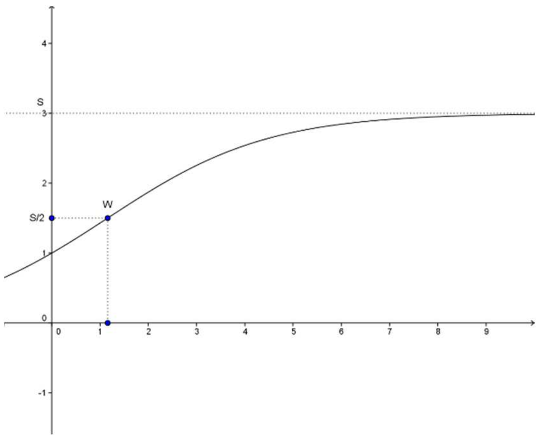
$$f(t) = \frac{S}{1 + a \cdot e^{-\lambda t}}$$

Wegen $\ddot{y} = c \cdot \dot{y} \cdot (S - 2y)$ hat der Graph von f an der Stelle x_1 mit $f(x_1) = \frac{1}{2}S$ einen Wendepunkt.

B:

$$f(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-0.3t}}$$

Die Gerade y = 3 ist Asymptote.



Uebungsaufgaben:
a)
Der Brusthöhendurchmesser d(t) in Meter einer Fichte in 1.3 m Höhe wächst mit der Zeit in Jahren ungefähr nach dem folgenden Gesetz:

$$d: \quad t \to d(t) = \frac{1}{1 + e^{-0.05 \cdot (t-60)}}$$

a) Welcher Durchmesser ist nach 40 Jahren zu erwarten?,
b) Welches Alter hat eine Fichte mit 0.4 m Durchmesser? Welchen Durchmesser hat die Fichte, wenn sie ausgewachsen ist?
c) Mit welcher Formel kann das Alter t einer Fichte aus dem Brusthöhendurchmesser berechnet werden?

b)
In einer Population von Taufliegen (Drosophila) werden 20 Tiere gezählt. Am nächsten Tag sind es bereits 24 Tiere. Es wird geschätzt, dass die Population auf 350 Tiere anwachsen kann.
a) Welche Funktion beschreibt den Wachstumsvorgang, wenn logistisches Wachstum angenommen wird.
b) nach wie viel Tagen ist die Population auf 95% ihres Endbestandes angewachsen?
c) nach wie viel Tagen ist die momentane Wachstumsrate am grössten?