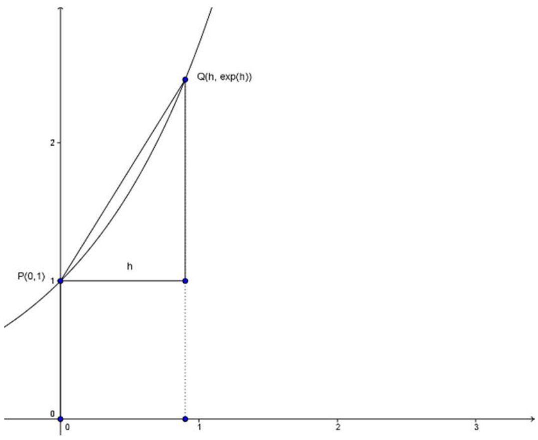
3. Ableitungen, Integrale

Ableitung der Exponentialfunktion

Differenzenquotient der Exponentialfunktion:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$



Setze $\mathrm{e}^{\mathrm{h}} - 1 = \frac{1}{\mathrm{n}}$

Wegen $\mathrm{e}^{\mathrm{h}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{n}}$ bzw. $\mathrm{h} = \ln\left(1 + \frac{1}{\mathrm{n}}\right)$ gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{x_0} \cdot \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Differentialquotient

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}_0} \cdot \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\mathrm{n}}\right)^{\mathrm{n}}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}_0}$$

nach Anwenden der Grenzwertsätze für ein Produkt bzw. für einen Quotienten. Ausserdem sind Limesbildung und ln vertauschbar.

Damit gilt:

$(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})' = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$ bzw. $\int e^x dx = e^x + c$

Beispiele:

$(\mathrm{e}^{\mathrm{kx}})' = \mathrm{k} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{kx}}$ bzw. im Spezialfall k = -1

$(\mathrm{e}^{-\mathrm{x}})' = -\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$

$(\mathrm{a}^{\mathrm{x}})' = \left(\mathrm{e}^{\ln \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}}\right)' = \ln \mathrm{a} \cdot \mathrm{e}^{\ln \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}} = \ln \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ was die Vorzugsrolle der Basis e erklärt.

gedämpfte Schwingung

$(e^x \cdot \cos x)' = e^x \cdot (\cos x - \sin x)$

Ableitung der Logarithmusfunktion

Differenzenquotient der Logarithmusfunktion:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln\left(x_0+h\right)-\ln x_0}{h}=\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x_0+h}{h}\right)=\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{x_0}{h}\right)$$

Setze $\frac{x_0}{h}=t$. Für $h\to\pm 0$ gilt $t\to\pm\infty$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{t}{x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$$

Differentialquotient

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{x_0}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\frac{1}{x_0}\cdot\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)=\frac{1}{x_0}\cdot\ln e=\frac{1}{x_0}$$

Für die stetige Funktion ln sind Limesbildung und ln vertauschbar.

Herleitungsvariante mit der Inversenregel:

$y=f(x)=f'(x)=e^x$ aufgelöst nach x:

$x=\ln y$

$\bar{f}'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{e^{x_0}}=\frac{1}{y_0}$ $y_0 > 0$ und damit nach Vertauschen der Variablen x und y:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\quad x>0$$

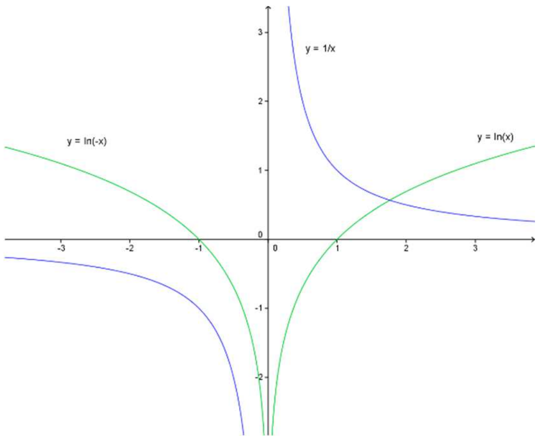
Für negative x ist ln (-x) definiert und es gilt nach der Kettenregel;

$$(\ln(-x))'=\frac{1}{x}\quad x<0$$

Zusammenfassend gilt:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\quad x\neq 0 \text{ bzw.}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c$$



Basiswechsel?

$$(\log_a x)'=?$$

$y=\log_a x$ ist gleichbedeutend mit $x=a^y$

Logarithmiert man diese Gleichung zur Basis e so erhält man:

$y\cdot\ln a=\ln x$ oder

$$y=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$$

$$(\log_a x)'=\left(\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

Verallgemeinerte Potenzregel:

$$\left(x^a\right)' = \left(e^{a\cdot\ln x}\right)' = e^{a\cdot\ln x}\cdot\frac{a}{x} = x^a\cdot\frac{a}{x} = a\cdot x^{a-1}$$ oder

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

z.B: $\left(x^{\sqrt{2}}\right)' = \sqrt{2}\cdot x^{\sqrt{2}-1}$

Beispiele zur Integration:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$$

Logarithmische Integration:

Nach der Kettenregel gilt: $\left(\ln\left(g(x)\right)\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$ und damit

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c$$ Logarithmische Integration

Beispiele:

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \ln\left(e^x+1\right) + c$$

$$\int \frac{1}{x\ln x} dx = \ln|\ln x| + c \quad x > 0,\ x \neq 1$$

Ergänzung:
Die Logarithmusfunktion kann auch als "fehlende" Stammfunktion folgendermassen definiert werden:

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \qquad x > 0$$

Daraus lassen sich alle grundlegenden Eigenschaften herleiten.
Da die Exponentialfunktion die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion ist erhält man mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}$$

erneut die 1. Ableitung der Exponentialfunktion zu $\left(e^x\right)' = e^x$