## 4. Wachstumsmodelle

Bei vielen in der Natur vorkommenden Wachstumsvorgängen ist die Zu- bzw. Abnahme in einer bestimmten Zeit abhängig vom aktuellen Bestand.

### 4.1 Exponentielles Wachstum

B:
Bei einer Bakterienkultur werden zu Beginn 100 Bakterien gezählt. Die Anzahl der Bakterien nehme (im Mittel) stündlich um 40% zu. Für die Bakterienzahl zur Zeit t gilt dann:

$$f(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{40}{100}\right)^t = 100 \cdot 1.4^t$$

$f(t) = a \cdot b^t$ a > 0, b > 1 allg. **exponentielle Wachstumsfunktion**

$f(0) = a$ ist der Anfangswert, b heisst Wachstumsfaktor.
Vergrössert man nämlich t um 1, so multipliziert sich der Funktionswert mit dem Faktor b, vergrössert man t um Δt, so wird der Funktionswert mit $b^{\Delta t}$ multipliziert

Insbesondere gilt:
**Exponentielles Wachstum zeichnet sich durch eine konstante Verdopplungszeit aus.**

Zum Vergleich:
$f(t) = a + b \cdot t$ **lineare Wachstumsfunktion**
$f(0) = a$ ist der Anfangswert. Vergrössert man t um 1, so wird zum Funktionswert b **addiert**.

Oft stellt man den Wachstumsfaktor bei exponentiellem Wachstum in der Form $b = e^k$ dar. In diesem Fall gilt $k = \ln b$ und die exponentielle Wachstumsfunktion kann neu in der folgenden Form dargestellt werden:

allg. **exponentielle Wachstumsfunktion** $f(t) = a \cdot e^{kt}$ k > 0

Für die 1.Ableitung (momentane Wachstumsrate) gilt dann: $f'(t) = ka \cdot e^{kt} = k \cdot f(t)$
d.h. die exponentielle Wachstumsfunktion erfüllt die Differentialgleichung $f' = k \cdot f$. Bei exponentiellem Wachstum ist also das momentane Wachstum proportional zum aktuellen Bestand. Der Parameter k damit kann folgendermassen interpretiert werden:
Wegen $k = \ln b = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100}$ gibt k das momentane prozentuale Wachstum in der Zeiteinheit dar. k = 0.07 bedeutet also eine momentane Wachstumsrate von 7%.

Verdopplungszeit τ

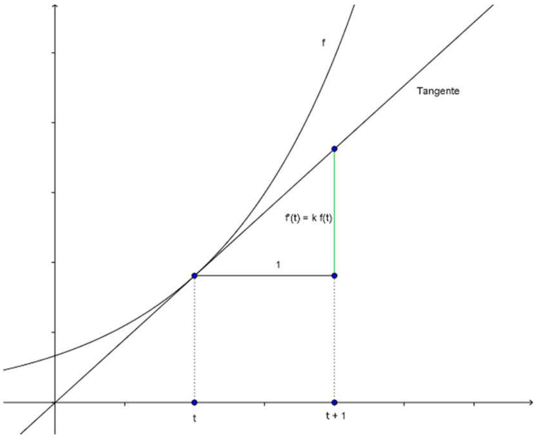
$f(\tau) = 2f(0) = f(0) \cdot e^{k\tau}$ $e^{k\tau} = 2$ $\tau = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{70}{p}$

Die Verdopplungszeit ist unabhängig vom aktuellen Bestand.

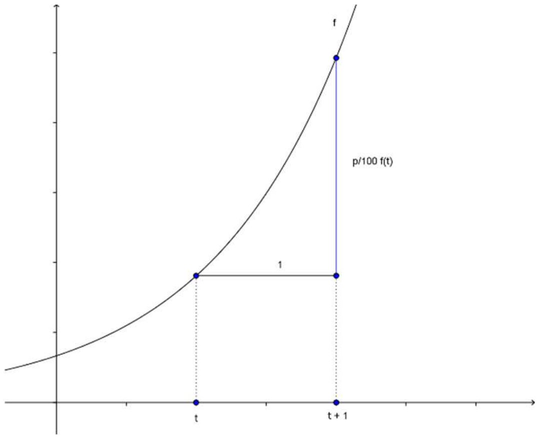
Zum Unterschied zwischen momentanem Wachstumsfaktor k und Wachstumsfaktor b

Geometrische Interpretation
Vergrössert man t um 1, so bringt dies

- einen Zuwachs der Tangente
  um das k-fache des Funktionswerts.




- so wird der Funktionswert mit b multipliziert
- so nimmt der Funktionswert um p% zu,
  wobei $b = 1 + \frac{p}{100}$

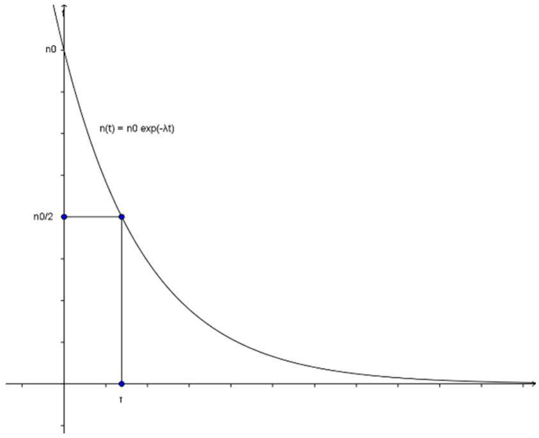



Da die Tangenten an die Exponentialkurven stets ganz unterhalb der Kurve verlaufen (bis auf den Berührungspunkt) ist k immer kleiner als $\frac{p}{100}$.

Im Unterschied dazu erfüllt die lineare Wachstumsfunktion die Differentialgleichung $f' = c$
d.h. beim linearen Wachstum ist die **absolute Wachstumsgeschwindigkeit** ist konstant.

## 4.2. Exponentieller Zerfall

Ist bei der exponentiellen Wachstumsfunktion
$f(t) = a \cdot b^t$ 0 < b < 1, so wird
in der Darstellung $f(t) = a \cdot e^{kt}$ der Parameter k negativ. Man setzt deshalb k = - λ . In diesem Fall spricht man von Abklingfunktionen bzw. von




**exponentielle Zerfallsfunktion**
$f(t) = a \cdot e^{-\lambda t}$ t ≥ 0, a > 0, λ > 0

f ist streng monoton fallend und strebt für t → ∞ asympto-tisch gegen die t-Achse y = 0

Beispiel: radioaktiver Zerfall:
$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$

$n_0$: Anzahl der zu Beginn vorhandenen Atomkerne
n(t): Anzahl der Atomkerne zur Zeit t
λ Zerfallskonstante

Exponentieller Zerfall zeichnet sich durch eine konstante Halbwertszeit τ aus. Nach der Halbwertszeit τ ist die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallen:

$n(\tau) = n_0 \cdot e^{-\lambda\tau} = \tfrac{1}{2} n_0$ oder $\tau = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$

Die Halbwertszeit ist also zu λ umgekehrt proportional.

Die Zerfallsfunktion erfüllt die Differentialgleichung
$\dot{n} = \dfrac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n$
d.h. Beim radioaktiven Zerfall trifft man die Modellannahme, dass die momentane Zerfallsrate proportional zur Zahl der aktuell noch vorhandenen Atomkerne ist.

Aufgabe:
Bei der radioaktiven Umwandlung von Bismut 210 in Polonium 210 beträgt die Halbwertszeit τ = 5.0 Tage.

Das Zerfallsgesetz heisst : $n(t) = n_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$

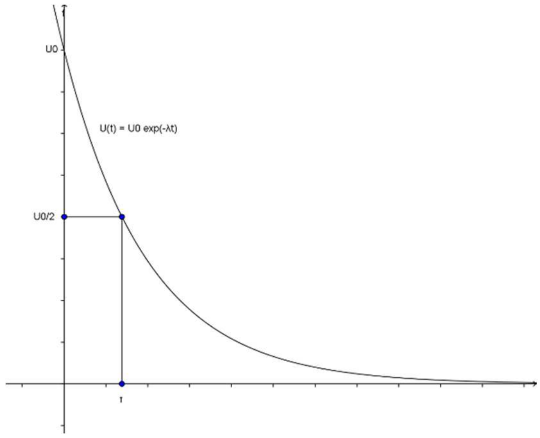
Aus der Gleichung $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = e^{-\lambda t}$ bzw. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{5}} = e^{-\lambda}$ folgt λ = $\ln 2^{\frac{1}{5}}$

Entladen eines Kondensators

In einem Kondensator werden elektrische Ladungen gespeichert. Das Speichervermögen eines bestimmten Kondensators wird durch seine Kapazität beschrieben. Beim Entladen eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R klingt die Kondensatorspannung u exponentiell mit der Zeit ab:

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$u_0$: Kondensatorspannung zu Beginn
RC: Zeitkonstante




Experiment 1998 (hr)
C = 2360 µF, R = 200 Ω, Spannungsquelle $U_0$ = 10 V

| | berechnet | gemessen |
|---|---|---|
| Halbwertszeit: | 0.327 s | 0.33 s |
| gesamte Ladung | 23.6 mAs | 28.6. mAs |

Uebungsaufgabe: Barometrische Höhenformel

Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h (gemessen gegenüber dem Meeresniveau h = 0 gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur das Gesetz:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

h in m, $p_0$ = 1.013 bar (Luftdruck auf Meereshöhe)

Der Luftdruck nimmt also mit zunehmender Höhe exponentiell ab.

Aufgabe:
Bestimme den Luftdruck in
a) $h_1$ = 500 m, b) $h_2$ = 1000 m, c) $h_3$ = 2000 m,
d) $h_4$ = 5000 m, e) $h_5$ = 8000 m

Lösungen:
a) 0.952 bar b) 0.894 bar c) 0.789 bar d) 0.542 bar e) 0.372 bar