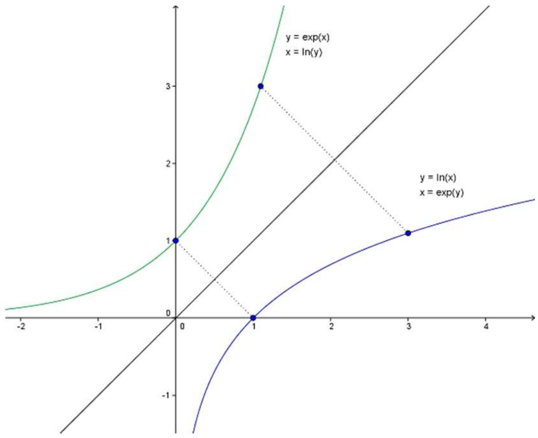
2. Logarithmusfunktion



Das Problem, die Gleichung $y = e^x$ für gegebenes y > 0 nach x aufzulösen, führt auf die Logarithmusfunktion, die Umkehrfunktion der Exponential-funktion.
Da die Exponentialfunkton monoton wächst, ist die Lösung x eindeutig bestimmt. Wir schreiben für diese eindeutig bestimmte Lösung:
$x = \log_e y$ oder kurz $x = \ln y$
ln heisst natürlicher Logarithmus.
In der nebenstehenden Skizze sind die Graphen der Exponentialfunktion $y = e^x$ und der Logarithmusfunktion
$y = \ln x$ dargestellt. Da die beiden Funktionen zueinander invers sind, sind die beiden Graphen symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden und es gilt:

$\ln e^x = x \quad x \in R$ bzw. $e^{\ln x} = x \quad x \in R^+$

Beachte die Spezialfälle (Logarithmen sind Exponenten!):

$\ln 1 = \ln e^0 = 0$, $\ln e = \ln e^1 = 1$, $\ln e^2 = 2$, $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$, $\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

Bekanntlich gelten die folgenden Logarithmengesetze:
L1: $\ln(uv) = \ln u + \ln v$
L2: $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$ L2': $\ln \frac{1}{v} = -\ln v$
L3: $\ln u^k = k \cdot \ln u$

aber: $\ln(u+v) \neq \ln u + \ln v$

Aufgabe:
Löse die folgenden Gleichungen:

$e^x = 2$ $x = \ln 2$
$e^{3x} = 5$ $3x = \ln 5$ $x = \frac{1}{3}\ln 5$
$e^{2x} = 4e^x$
Lösung durch Faktorisieren :
$e^x(e^x - 4) = 0$
$x = \ln 4 \quad (e^x > 0\,!)$

Lösung durch Logarithmieren:
$\ln(e^{2x}) = \ln(4e^x) = \ln 4 + \ln(e^x)$
$2x = \ln 4 + x$
$x = \ln 4$