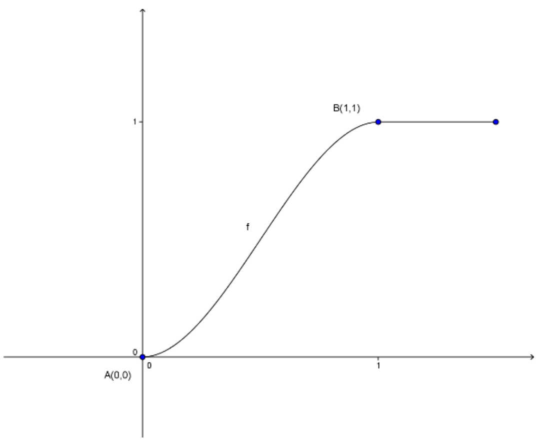
9. Funktionsgleichung gesucht, Interpolationspolynome

In der Praxis stellt sich etwa die Aufgabe ein Polynom (häufig vom 3. Grades) mit vorgegebenen Eigenschaften zu bestimmen.

Aufgabe:
Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, dessen Graph die zwei geradlinigen Strassenstücke in der Skizze möglichst glatt ineinander überführt.

Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



Zur Bestimmung der 4 Koeffizienten sind 4 Bedingungen nötig. An den Stellen 0 und 1 sollten Funktionswert und 1. Ableitung die vorgegebenen Werte annehmen:

$f(0) = 0 \qquad d = 0$

$f(1) = 1 \qquad a + b + c + d = 1$

$f'(0) = 0 \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad c = 0$

$f'(1) = 0 \qquad 3a + 2b + c = 0$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen
a = -2 und b = 3

Gesuchte Gleichung: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe:
Der Graph eines Polynoms 3. Grades geht durch A(0,8) und hat in W(2,4) einen Wendepunkt. Die Wendetangente ist parallel zur Geraden y = -3x. Wie heisst die Polynomgleichung?

Ansatz:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad f''(x) = 6ax + 2b$

$f(0) = 8$	(1)	d = 8	eingesetzt in (2) und (4) und ordnen
$f(2) = 4$	(2) $8a + 4b + 2c + 8 = 4$		$4a + 2b + c + 4 = 2$
$f''(2) = 0$	(3) $12a + 2b = 0$		
$f'(2) = -3$	(4) $12a + 4b + c = -3$		Die Tangente in W ist parallel zu $y = -3x$

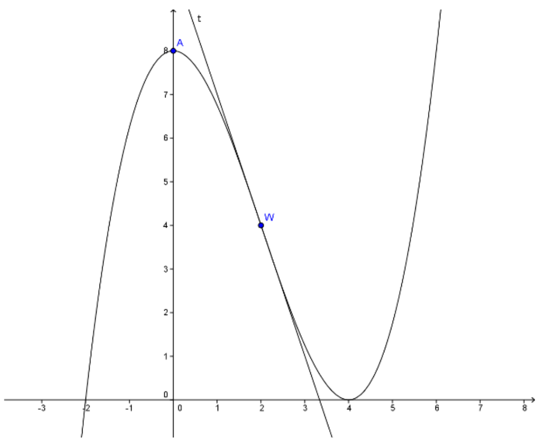
$$\left| \begin{array}{lll} 4a & +2b & +c = -2 \\ 12a & +4b & +c = -3 \\ 12a & +2b & \quad = 0 \end{array} \right|$$

Subtrahiert man die 1. Gleichung von der 2., so erhält man das folgende Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ll} 8a & +2b = -1 \\ 12a & +2b = 0 \end{array} \right|$$

Nach erneuter Subtraktion der 1. Von der 2. Gleichung 4a = 1 oder a = $^1/_4$.
Einsetzten in die 3. bzw. 1. Gleichung führt auf b = -$^3/_2$ und schliesslich auf c = 0

Gesuchte Gleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$



Bem.:
Da ein Polynom 3. Grades genau einen Wendepunkt hat, ist die Bedingung f '''(3) ≠ 0 automatisch erfüllt.

Beachte den speziellen Ansatz bei symmetrischen Graphen:

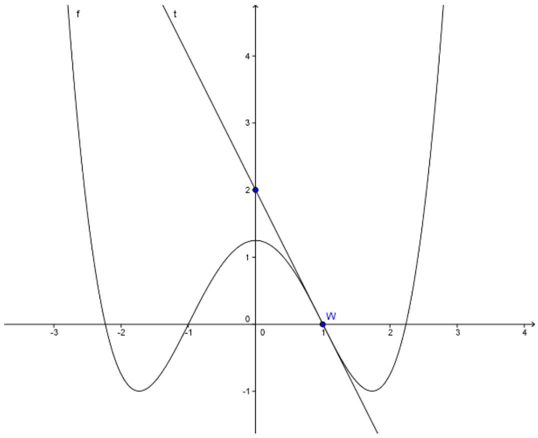
Zentralsymmetrischer Graph eines Polynoms von 3. Grad: $f(x) = ax^3 + cx$

Zur y-Achse axialsymmetrischer Graph eines Polynoms 4. Grades: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Aufgabe:
Der Graph eines Polynoms 4. Grades ist zur y-Achse symmetrisch. W(1/0) ist Wendepunkt. Die Wendetangente in P schneidet die y-Achse bei y = 2. Wie heisst die Funktionsgleichung?

Ansatz:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$



f(1) = 1 (1) $a+b+c=0$
f "(1) = 0 (2) $12a+2b=0$
f '(1) = -2 (3) $4a+2b=-2$
Steigung der Geraden durch P(0/2) und W(1/0)

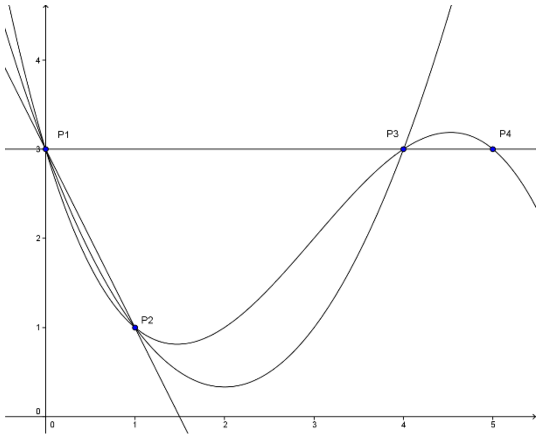
(3) von (2) subtrahieren
$a = \frac{1}{4}$ eingesetzt in (2) ergibt $b = -6a = -\frac{3}{2}$
bzw. in (1) $c = \frac{5}{4}$
Gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$

Interpolation

In Anwendungen stellt sich etwa das Problem, eine Funktion anzugeben, die an vorgegebenen x-Werten (den sogenannten Stützstellen) vorgegebene Funktionswerte annimmt. Die Funktion ermöglicht es dann, für x-Werte zwischen (inter!) den Stützstellen plausible Funktionswerte anzugeben. In diesem Fall spricht man von Interpolation z.B. lineare Interpolation bei Tabellen.

Gemäss einer Idee von Newton kann die Aufgabe schrittweise gelöst werden, wie das folgende Beispiel zeigt.

B.:
$P_1(0/3)$, $P_2(1/1)$, $P_3(4/3)$, $P_4(5/3)$
$f_1(x)=3$
Ansatz für f_2:
$f_2(x)=3+a\cdot(x-0)$
mit $f_2(1)=1$ ergibt a = -2
Ansatz für f_3:
$f_3(x)=3-2\cdot(x-0)+b\cdot x\cdot(x-1)$
mit $f_3(4)=3$ ergibt $b=\frac{2}{3}$
Ansatz für f_4:



$f_4(x)=3-2\cdot(x-0)+\frac{2}{3}\cdot x\cdot(x-1)+c\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-4)$
mit $f_4(5)=3$ ergibt $c=-\frac{1}{6}$
Gesuchte Funktionsgleichung:

$$f_4(x)=3-2\cdot(x-0)+\tfrac{2}{3}\cdot x\cdot(x-1)-\tfrac{1}{6}\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-4)$$
$$=-\tfrac{1}{6}\cdot x^3+\tfrac{3}{2}\cdot x^2-\tfrac{10}{3}\cdot x+3$$

Uebungsaufgabe:
An einem Wintertag wurden folgende Temperaturen gemessen:

Tageszeit:	10:00	14:00	16:00	18:00
Temperatur	-5°	3°	2°	-5°

Wie hoch war die Temperatur um 12:00 und zu welcher Zeit und wie hoch war die Temperatur maximal
a) bei polynomialer Interpolation?
b) bei quadratischer Interpolation, wenn die letzte Messung weggelassen wird?

Lösung:
a) 12:00 0°, Maximale Temperatur 3.2° um 14:37‘
b) 12:00 0.7°, Maximale Temperatur 3.1° um 14:24