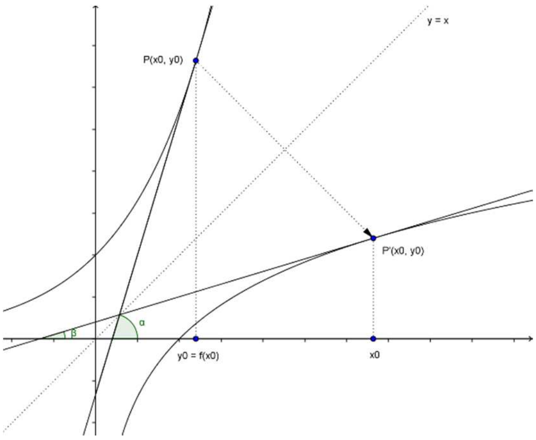
2. Ableitung der Umkehrfunktion

Es soll untersucht werden, welcher Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und der Ableitung ihrer Umkehrfunktion besteht.

In der Skizze hat der Graph der streng monoton wachsenden Funktion f im Punkt $P(x_0, y_0)$ die Tangentensteigung $\tan\alpha = f'(x_0)$. Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ hat als Spiegelbild bezüglich der 1. Winkelhalbierenden im Punkt $\bar{P}(y_0, x_0)$ die Tangentensteigung $\tan\beta$ mit $\beta = 90° - \alpha$, womit gilt:



$\tan\beta = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ oder also

$$\bar{f}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \bar{f}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Inversenregel:
Ist die im Intervall I umkehrbare Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar und ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion $\bar{f}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \text{oder} \quad \bar{f}'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis:
Sei x_n eine beliebige Folge mit dem Grenzwert x_0
Nach Definition der 1. Ableitung gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} \quad \text{und}$$

$$\bar{f}'(y_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{f}(y_n) - \bar{f}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

B:

Die Quadratfunktion $y = f(x) = x^2$ ist für nichtnegative x monoton wachsend und damit umkehrbar.

1. Ableitung: $f'(x) = 2x$

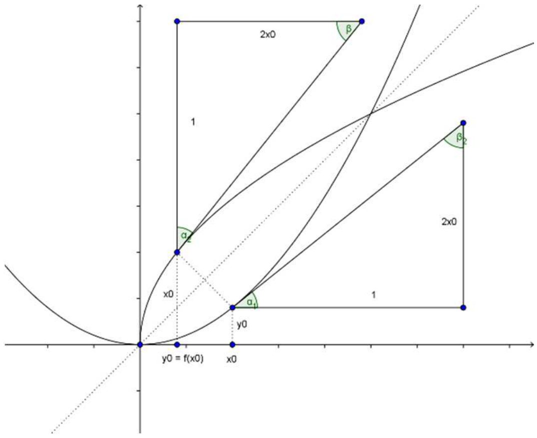
Gleichung der Umkehrfunktion: $x = \sqrt{y}$.

Nach der Inversenregel gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

und mit der üblichen Variablenbezeichnung:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0$$



geom.:

Offensichtlich sind die Tangentensteigungen in P_1 und P_2 zueinander reziprok.

B: Verallgemeinerte Potenzregel für $r \in Q$

Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ ist für nichtnegative x monoton wachsend und damit umkehrbar.

1. Ableitung: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Gleichung der Umkehrfunktion: $x = y^{\frac{1}{n}}$.

Nach der Inversenregel gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \left(y_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot y_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot y_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y_0^{\frac{1}{n}-1}$$

und mit der üblichen Variablenbezeichnung:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \qquad x > 0$$

Verallgemeinerte Potenzregel:

$$\left(x^r\right)' = r \cdot x^{r-1} \quad r \in Q \quad r > 0$$

Beweis:

Sei $r = \frac{m}{n}$ $\quad$ m $\in$ Z, n $\in$ N

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot m \cdot x^{m-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-m+m-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

B:
Die Exponentialfunktion $y = f(x) = e^x$ ist wegen $y = f'(x) = e^x > 0$ monoton wachsend und damit umkehrbar.
Gleichung der Umkehrfunktion: $x = \ln y$.
Nach der Inversenregel gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$$

und mit der üblichen Variablenbezeichnung:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$